

TD probabilités

Exercice 1

(3383)

Tombola

Dans une tombola, 1000 billets sont mis en vente, et deux billets sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à $1/2$ d'avoir un billet gagnant.

Exercice 2

(3384)

Pièces défectueuses

Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.

si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98. On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

qu'il y ait une erreur de contrôle ?

qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 3

(3386)

Écriture ensembliste

Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω . Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

Seul A se réalise ;

A et B se réalisent, mais pas C .

les trois événements se réalisent ;

au moins l'un des trois événements se réalise ;

au moins deux des trois événements se réalisent ;

aucun ne se réalise ;

au plus l'un des trois se réalise ;

exactement deux des trois se réalisent ;

Exercice 4

(3387)

Sur la probabilité de l'intersection

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Démontrer que

$$\max(0, P(A) + P(B) - 1) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)).$$

Exercice 5

(3389)

Jeu de cartes

On tire trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des coeurs ?

que des as ?

deux coeurs et un pique ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exercice 6

(3390)

Au moins un six !

Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 6 ?

au moins deux fois le chiffre 6 ?

au moins k fois le chiffre 6 ?

Exercice 7

(3391)

Racines de polynômes

On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a , b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que :

Q ait deux racines réelles distinctes.

Q ait une racine réelle double.

Q n'ait pas de racines réelles.

Exercice 8

(3393)

La coupe

Pour organiser une coupe, on organise un tirage au sort qui réunit n équipes de basket-ball de 1ère division et n équipes de 2ème division, de sorte que chaque équipe joue un match, et un seul.

Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de 1ère division à une équipe de 2ème division.

Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$.

Exercice 9

(3394)

Dés pipés

On dispose d'un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance le dé pipé.

Donner un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.

Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair.

Reprendre les questions si cette fois le dé est pipé de sorte que la probabilité d'une face paire soit le double de la probabilité d'une face impaire.

Exercice 10

(3395)

Déterminer une probabilité

Soit $n \geq 1$. Déterminer une probabilité sur $\{1, \dots, n\}$ telle que la probabilité de $\{1, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2 .

Exercice 11

(3396)

Indépendance et contexte

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les événements

$$A = \text{"tirage d'un nombre pair"},$$

$$B = \text{"tirage d'un multiple de 3"}.$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 12

(3397)

Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

Votre voisin a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événements suivants : <ul class="rien">

$A = \text{"les deux enfants sont de sexes différents"}$

$B = \text{"l'aîné est une fille"}$

$C = \text{"le cadet est un garçon"}$. Montrer que A , B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 13

(3400)

Circuit électrique

Soient A , B , C trois événements. Montrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

On dispose de 3 composants électriques C_1 , C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i , et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit

si les composants sont disposés en série.

si les composants sont disposés en parallèle.

si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 14

(3401)

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $1/3$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n -ième lecture ?

Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n -ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 15

(3404)

Probabilités composées

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 16

(3406)

QCM

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 17

(3408)

Compagnie d'assurance

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1 , R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1 , 50% pour la classe R_2 , et 30% pour la classe R_3 . Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 18

(3410)

Tests de dépistage

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Exercice 19

(3411)

Menteur !

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ?