# Corrigé
# TD probabilités

## Exercice 1
**(3383)**

Notons $n$ le nombre de billets achetés. On cherche la probabilité $p_n$ de l'événement "au moins un des billets achetés est gagnant". Bien sûr, c'est la propriété de l'événement complémentaire "aucun des billets achetés n'est gagnant" que l'on va calculer. Il y a $\binom{1000}{n}$ choix possibles d'achats de billets et $\binom{998}{n}$ choix qui amènent à aucun billet gagnant. On a donc

$$\begin{aligned} p_n &= 1-\frac{\binom{998}{n}}{\binom{1000}{n}} \\ &= 1-\frac{(1000-n)(999-n)}{1000\times 999}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} p_n \geq 1/2 &\iff \frac{(1000-n)(999-n)}{1000\times 999}\leq 1/2 \\ &\iff n^2-1999n+500\times 999\leq 0. \end{aligned}$$

Le calcul des racines de ce polynôme montre que l'une des racines est comprise entre 292 et 293 et l'autre est supérieure à 1000. Le polynôme est négatif entre ces deux racines, et il faut donc acheter au moins 293 billets.

## Exercice 2
**(3384)**

On note $A$ l'événement "la pièce est acceptée par le contrôle", et $B$ l'événement "la pièce est bonne". L'événement $E$ "Il y a une erreur au contrôle" se décompose en $A\cap\overline{B}$ et $\overline{A}\cap B$. Ces deux derniers événements sont incompatibles, on a donc :

$$P(E)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B).$$

Maintenant, $P(A\cap\overline{B})=P(A|\overline{B})P(\overline{B})$. Or, $P(\overline{B})=0,05$, et $P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=0,02$. De même, on a $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A}|B)P(B)$ et on a $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=0,04$. On obtient finalement :

$$P(E)=0,95\times 0,04+0,05\times 0,02.$$

Dans cette question, on cherche $P(\overline{B}|A)$ alors que l'on connait les probabilités conditionnelles sachant $B$. Ceci nous invite à utiliser la formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\overline{B}|A) &= \frac{P(\overline{B})P(A|\overline{B})}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})} \\ &= \frac{0,05\times 0,02}{0,95\times 0,96+0,05\times 0,02}=\frac{1}{913}\simeq 0,001. \end{aligned}$$

## Exercice 3
**(3386)**

Seul $A$ se réalise : $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ ;
$A$ et $B$ se réalisent, mais pas $C$ : $(A\cap B)\backslash C=(A\cap B)\cap\bar{C}$ ;

les trois événements se réalisent : $A \cap B \cap C$ ;
au moins l'un des trois événements se réalise : $A \cup B \cup C$ ;
au moins deux des trois événements se réalisent : $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ;
aucun ne se réalise : $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ;
au plus l'un des trois se réalise : c'est le contraire de "au moins deux se réalisent", donc

$$\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)};$$

exactement deux des trois se réalisent : on peut le reformuler en "au moins deux se réalisent, mais pas trois", d'où

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cap \overline{A \cap B \cap C}.$$

## Exercice 4
**(3387)**

Remarquons d'abord que $A \cap B \subset A$ et donc $P(A \cap B) \leq P(A)$. De même, $P(A \cap B) \leq P(B)$, ce qui prouve l'inégalité de droite. De plus, $P(A \cap B) \geq 0$ et aussi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Mais $P(A \cup B) \leq 1$ et donc

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

On a donc aussi obtenu l'inégalité de gauche.

## Exercice 5
**(3389)**

Le nombre de tirages possible est $\binom{8}{3}$. Le nombre total de tirages est $\binom{32}{3}$. La probabilité recherchée est donc

$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{32 \times 31 \times 30} = \frac{7}{620}.$$

Le raisonnement est identique. On obtient

$$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{4 \times 3 \times 2}{32 \times 31 \times 30} = \frac{1}{1240}.$$

Le nombre de tirages possibles est $\binom{8}{2} \times \binom{8}{1}$. La probabilité recherchée est donc

$$\frac{\binom{8}{2} \times \binom{8}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{7}{155}.$$

## Exercice 6
**(3390)**

Dans chaque cas, on va plutôt étudier la probabilité d'obtenir l'événement complémentaire.

La probabilité de n'obtenir aucun 6 est $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. La probabilité d'obtenir au moins un six est donc $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Soit $A$ l'événement "obtenir au maximum une fois le chiffre 6". Alors $A$ est la somme des événements disjoints $A_0$ = "ne jamais obtenir six" et $A_1$ = "obtenir exactement 1 fois le chiffre 6". On a $P(A) = P(A_0) + P(A_1)$. De plus, $P(A_0)$ a été calculé à la question précédente :

$$P(A_0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Calculons désormais $P(A_1)$. On commence par choisir le lancer où on a obtenu le chiffre 6. Il y a $\binom{n}{1} = n$ tels choix. Ce lancer fixé, la suite de lancers a une probabilité valant $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ de se réaliser. On en déduit que

$$P(A_1) = \binom{n}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Finalement, la probabilité d'obtenir au moins deux fois le chiffre 6 vaut

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \binom{n}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

On généralise la méthode précédente. Notons $A_j$ la probabilité d'obtenir exactement $j$ fois le chiffre 6. La probabilité recherchée est

$$1 - P(A_0) - P(A_1) - \cdots - P(A_{k-1}).$$

Mais, pour calculer $P(A_j)$ on détermine d'abord la place des $j$ chiffres 6 : il y a $\binom{n}{j}$ tels choix. Ce choix fait, la suite de lancers a une probabilité égale à $\left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}$ de se réaliser. On a donc

$$P(A_j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}.$$

On conclut finalement que la probabilité d'obtenir au moins $k$ fois le chiffre 6 vaut

$$1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}.$$

## Exercice 7

**(3391)**

On associe à l'expérience aléatoire l'univers des possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$, muni de l'équiprobabilité. Ainsi, la probabilité d'un événement $A$ vaut $(A)/6^3$. On s'intéresse d'abord à l'événement $A = \{(a, b, c) \in \Omega;\ b^2 - 4ac > 0\}$. Il suffit de dénombrer $A$. On commence par établir un petit tableau avec les valeurs de $4ac$ :

| $c \backslash a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 2 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 |
| 3 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 |
| 4 | 16 | 32 | 48 | 64 | 80 | 96 |
| 5 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
| 6 | 24 | 48 | 72 | 96 | 120 | 144 |

On calcule le cardinal de $A$ en regardant dans le tableau le nombre de valeurs de $a$ et $c$ pour lesquelles $b^2 > 4ac$, pour les 6 valeurs que peut prendre $b$. On trouve :

$$(A) = 0 + 0 + 3 + 5 + 14 + 16 = 38.$$

On en déduit :

$$P(A) = \frac{38}{216} = \frac{19}{108}.$$

On note pareillement $B = \{(a,b,c) \in \Omega;\ b^2 - 4ac = 0\}$ et $C = \{(a,b,c) \in \Omega;\ b^2 - 4ac < 0\}$. Le même dénombrement prouve que :

$$P(B) = \frac{5}{216}.$$

On peut calculer $P(C)$ de la même façon, ou remarquer que les 3 événement $A, B, C$ forment un système complet d'événements. On déduit alors :

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{173}{216}.$$

## Exercice 8
## (3393)

On va dénombrer les tirages au sort en tenant compte de l'ordre des matchs dans le tirage (c'est-à-dire que si l'on a 4 équipes A,B,C et D, les tirages (A-B,C-D) et (C-D,A-B) sont comptés comme deux tirages différents car ils n'ont pas le même premier match). On pourrait faire sans cette convention, on obtiendrait les mêmes résultats mais cela changerait un peu la façon de faire. Un tirage au sort se présente donc comme une $n-$liste de matchs, c'est-à-dire une $n-$liste de combinaisons 2 à 2 disjointes. Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de choisir la première combinaison. Puis, cette combinaison choisie, il y a encore $\binom{2n-2}{2}$ façons de choisir la combinaison suivante. Et ainsi de suite... Ainsi, le nombre total de tirages au sort est :

$$\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times \dots \binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

Parmi ces tirages, comptons ceux qui ne font s'opposer que des équipes de division distinctes. Pour le premier match, il y a $n$ façons de choisir l'équipe de première division, et $n$ façons de choisir l'équipe de deuxième division, soit $n^2$ choix. Pour le second match, il reste à choisir parmi $n-1$ équipes, et donc on a $(n-1)^2$ choix. Finalement, on obtient :

$$p_n = \frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2^n}} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

D'abord, si $n$ est impair, un tel tirage au sort est clairement impossible, et $q_n = 0$. On suppose donc que $n$ est pair et s'écrit $2k$. On choisit d'abord les $k$ matchs parmi $2k$ qui opposent les matchs de 1ère division entre eux : cela fait $\binom{2k}{k}$ choix. Une fois ce choix réalisé, il faut compter le nombre de tirages à l'intérieur entre équipes de 1ère division. De la même façon que lorsqu'on a compté le nombre total de tirages au sort, on trouve $\frac{(2k)!}{2^k}$. De même pour les tirages au sort entre équipes de 2è division. On a donc :

$$q_{2k} = \frac{2^{2k}}{(4k)!} \times \binom{2k}{k} \times \left(\frac{(2k)!}{2^k}\right)^2 = \frac{\binom{2k}{k}}{\binom{4k}{2k}}.$$

Ecrivons que :

$$(2n)! = 2^n(2n-1)(2n-3)\dots 3\times 1\times n!.$$

On a donc :

$$\binom{2n}{n} = 2^n\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3\times 1}{n!}.$$

Maintenant, en utilisant l'encadrement $2n-k-1\leq 2n-k\leq 2n-k+1$, on obtient

$$2^n\frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4\times 2}{n!}\leq \binom{2n}{n}\leq 2^n\frac{2n(2n-4)\dots 4\times 2}{n!}$$

qui donne finalement le résultat demandé.

On a donc :

$$0\leq p_n\leq \frac{n}{2^{n-1}},$$

qui prouve que $p_n$ tend vers 0 si $n$ tend vers $+\infty$. De même pour $q_n$...

## Exercice 9
(3394)

L'univers le plus naturel à associer à l'expérience est $\{1,\dots,6\}$. Soit $\mathbb{P}$ la probabilité modélisant l'expérience aléatoire. L'énoncé nous dit que $\mathbb{P}(\{i\}) = \lambda\times i$. Le problème est de déterminer $\lambda$. Pour cela, on remarque que

$$\mathbb{P}(\{1\})+\mathbb{P}(\{2\})+\mathbb{P}(\{3\})+\mathbb{P}(\{4\})+\mathbb{P}(\{5\})+\mathbb{P}(\{6\}) = 1.$$

Mais,

$$\mathbb{P}(\{1\})+\mathbb{P}(\{2\})+\mathbb{P}(\{3\})+\mathbb{P}(\{4\})+\mathbb{P}(\{5\})+\mathbb{P}(\{6\}) = 21\lambda.$$

On doit donc avoir $\lambda = \dfrac{1}{21}$.

On a

$$\mathbb{P}(\{\text{obtenir un chiffre pair}\}) = \mathbb{P}(\{2\})+\mathbb{P}(\{4\})+\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

L'univers est le même. Posons cette fois $\lambda = \mathbb{P}(\{1\})$. Alors on doit avoir

$$\mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = 2\lambda$$

et

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \lambda.$$

Par le même raisonnement qu'à la question précédente, on doit avoir

$$3\lambda+6\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{9}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(\{\text{obtenir un chiffre pair}\}) = \frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

## Exercice 10
(3395)

L'énoncé nous dit que l'on cherche une probabilité $P$ telle que $P(\{1,\dots,k\}) = \lambda k^2$. On a alors, pour $k = 1,\dots,n$,

$$P(\{k\}) = P(\{1,\dots,k\}) - P(\{1,\dots,k-1\}) = \lambda k^2 - \lambda(k-1)^2 = 2\lambda k - \lambda.$$

On va déterminer $\lambda$ en remarquant que

$$P(\{1,\dots,n\}) = 1$$

ce qui entraîne

$$\lambda n^2 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{n^2}.$$

La probabilité est donc définie par

$$P(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

On vérifie aisément que réciproquement, cette probabilité vérifie que $P(\{1,\dots,k\})$ est proportionnelle à $k^2$.

## Exercice 11
## (3396)

On a :

$$A = \{2,4,6,8,10,12\}$$
$$B = \{3,6,9,12\}$$
$$A \cap B = \{6,12\}.$$

On a donc $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cap B) = 1/6 = P(A)P(B)$. Les événements $A$ et $B$ sont indépendants.

Les événements $A$, $B$ et $A \cap B$ s'écrivent encore exactement de la même façon. Mais cette fois, on a : $P(A) = 6/13$, $P(B) = 4/13$ et $P(A \cap B) = 2/13 \neq 24/169$. Les événements $A$ et $B$ ne sont pas indépendants. C'est conforme à l'intuition. Il n'y a plus la même répartition de boules paires et de boules impaires, et dans les multiples de 3 compris entre 1 et 13, la répartition des nombres pairs et impairs est restée inchangée.

## Exercice 12
## (3397)

Clairement, on a $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Les quatres possibilités pour les deux enfants, supposées équiprobables, sont (F,G), (F,F), (G,G), (G,F). On en déduit que $P(A) = \frac{1}{2}$.<br> Ensuite $A \cap B$ correspond à $(F,G)$ et donc $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$. On en déduit que $A$ et $B$ sont indépendants. On prouve de la même façon que $A$ et $C$ sont indépendants, et que $B$ et $C$ sont indépendants.<br> Enfin, $A \cap B \cap C = B \cap C$ et donc $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$. Les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

## Exercice 13
## (3400)

On procède en deux temps. D'une part :

$$P\left((A \cup B) \cup C\right) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Mais,

$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C),$$

et

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

On appelle aussi ceci la formule du crible de Poincaré, elle se généralise avec plusieurs événements par récurrence.

On note $F_i$ l'événement : "le composant $C_i$ fonctionne". Par hypothèse, les événements $F_i$ sont mutuellement indépendants. Il faut calculer pour le premier cas $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$ (le circuit formé par les trois composants disposés en série fonctionne si et seulement si les trois composants fonctionnent), pour le second $P(F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ (le circuit formé par les trois composants disposés en parallèle fonctionne si et seulement si un des trois composants fonctionne), et pour le troisième $P(F_1 \cap (F_2 \cup F_3))$. On a :

Par indépendance des événements :

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = p_1 p_2 p_3.$$

D'après la formule précédente, et par indépendance des événements :

$$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3.$$

L'événement $F_2 \cup F_3$ est indépendant de $F_1$. On a donc :

$$P(F_1 \cap (F_2 \cup F_3)) = P(F_1)P(F_2 \cup F_3) = P(F_1)\big(P(F_2) + P(F_3) - P(F_2 \cap F_3)\big)$$

soit

$$P(F_1 \cap (F_2 \cup F_3)) = p_1 \left(p_2 + p_3 - p_2p_3\right).$$

## Exercice 14
## (3401)

Notons $A_i$ l'événement "l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée par le $i$-ème relecteur". Alors on a $P(A_i) = 2/3$ et les événements $A_i$ sont indépendants. On s'intéresse à la probabilité de l'événement $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ qui vaut donc

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2}{3} = \frac{2^n}{3^n}.$$

Notons $B_j$ l'événement "l'erreur numéro $j$ n'est pas corrigé à l'issue de la $n$-ième relecture". D'après la question précédente, on a $P(B_j) = 2^n/3^n$ pour $j = 1, \dots, 4$. Le livre est entièrement corrigé après la $n$-ième relecture si l'événement $\bigcap_{j=1}^{4} \overline{B_j}$ est réalisé. Les événements $B_j$ étant indépendants, le livre est entièrement corrigé après $n$ relectures avec une probabilité valant

$$\prod_{j=1}^{4} \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) = \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)^4.$$

Cette probabilité est supérieure à $0,9$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)^4 \geq 0.9 \quad &\iff \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1 - (0.9)^{1/4} \\
&\iff \quad n \ln(2/3) \leq \ln(1 - 0.9^{1/4}) \\
&\iff \quad n \geq \frac{\ln(1 - 0.9^{1/4})}{\ln(2/3)}
\end{aligned}$$

et donc ceci fonctionne dès que $n \geq 10$.

## Exercice 15

**(3404)**

On note $B_i$ (resp. $N_i$) l'événement : "La $i$-ème boule tirée est blanche (resp. noire)". On cherche à calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$, ce que l'on va faire en utilisant la formule des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap B_2).$$

Chacune des probabilités qui apparaît est facile à calculer, car $P(B_1) = 4/7$, $P(B_2|B_1) = 3/6$ (il reste 6 boules dont 3 blanches) et $P(N_3|B_1 \cap B_2) = 3/5$. Finalement, on obtient $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{6}{35}$.

## Exercice 16

**(3406)**

On note :

$$B = \{\text{L'étudiant donne la bonne réponse}\}$$
$$C = \{\text{L'étudiant connait la bonne réponse}\}.$$

On cherche $P_B(C) = P(C|B)$, et l'énoncé donne :

$$P(C) = p,\ P(B|C) = 1,\ P(B|\bar{C}) = \frac{1}{m}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(C)P(B|C) + P(\bar{C})P(B|\bar{C}) = \frac{(m-1)p+1}{m}.$$

D'après la formule de Bayes :

$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}.$$

## Exercice 17

**(3408)**

On note $A$ l'événement "avoir un accident dans l'année". Comme les trois classes $R_1$, $R_2$ et $R_3$ réalisent une partition de la population. On peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|R_1)P(R_1) + P(A|R_2)P(R_2) + P(A|R_3)P(R_3) \\ &= 0,05 \times 0,2 + 0,15 \times 0,5 + 0,3 \times 0,3 \\ &= 0,175. \end{aligned}$$

On cherche la probabilité d'être dans $R_1$ sachant qu'on n'a pas eu d'accident, c'est-à-dire la probabilité $P(R_1|\overline{A})$. La formule de Bayes donne :

$$P(R_1|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|R_1)P(R_1)}{P(\overline{A})}.$$

La probabilité $P(\overline{A})$ se calcule par la formule $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, tandis que l'énoncé donne $P(\overline{A}|R_1) = 0,95$. On obtient finalement :

$$P(R_1|\overline{A}) = \frac{0,95 \times 0,2}{1-P(A)} = 0,23.$$

**Exercice 18**
**(3410)**
Les chiffres donnés ont l'air excellent, mais ils donnent l'inverse de ce que l'on souhaite. Le problème est plutôt le suivant : si une personne a une réponse positive au test, est-elle malade ? C'est la formule de Bayes qui permet de remonter le chemin. Précisément, on note $M$ l'événement "La personne est malade", et $T$ l'événement "le test est positif". Les données dont on dispose sont $P(M) = 10^{-4}$, $P(T|M) = 0,99$ et $P(T|\bar{M}) = 0,001$. On cherche $P(M|T)$. La formule de Bayes donne :

$$\begin{aligned} P(M|T) &= \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})} \\ &= \frac{10^{-4} \times 0,99}{10^{-4} \times 0,99 + 10^{-3} \times 0,9999} \\ &\simeq 0,09. \end{aligned}$$

C'est catastrophique ! La probabilité pour qu'une personne positive au test soit effectivement malade est inférieure à 10%. Le test engendre donc beaucoup de faux-positifs (personnes positives au test, mais non malades). C'est tout le problème des maladies assez rares : les test de dépistage doivent être extrêmement fiables. Remarquons par ailleurs ici une bonne illustration du vieil adage des statisticiens : on peut faire dire n'importe quoi aux chiffres, cf le laboratoire pharmaceutique !

**Exercice 19**
**(3411)**
Soit $x$ la proportion de tricheurs dans la population. On note respectivement $P, F, H, T$ les événements "le joueur obtient pile", "le joueur obtient face", "Le joueur est honnête", "le joueur est un tricheur". Il semble raisonnable de convenir que $P(P|H) = 1/2$ et $P(F|H) = 1/2$ et $P(P|T) = 1$ (un tricheur fait vraiment ce qu'il veut !). On cherche donc $P(T|P)$. De la formule de Bayes, on déduit :

$$P(T|P) = \frac{P(P|T)P(T)}{P(P|T)P(T) + P(P|H)P(H)} = \frac{x}{x + 1/2(1-x)} = \frac{2x}{x+1}.$$

Le résultat est plus ou moins réconfortant suivant la proportion de tricheurs $x$ dans la population !