Chapitre 20 : correction des exercices.

Exo 1 : l'univers Ω est constitué des couples des résultats des deux dés :

$$\Omega = [\![1,6]\!]^2 = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,5),(6,6)\}$$

a) l'événement est $A = \{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$

la probabilité est uniforme (les dés sont non pipés) donc

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

b) l'événement est $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

donc $\boxed{P(A) = \frac{5}{36}}$

c) l'événement est $A = \{(6,1),\dots,(6,5),(1,6),\dots,(5,6),(6,6)\}$

et $\boxed{P(A) = \frac{11}{36}}$. On peut remarquer que $\bar{A}$ est l'événement "pas de six", d'où $\bar{A} = [\![1,5]\!]^2$ et $P(\bar{A}) = \frac{25}{36}$

donc $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{11}{36}$.

Exo 2 : on a $P(\{a,b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\})$ car $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

et $P(\{b,c\}) = P(\{b\}) + P(\{c\})$

enfin $P(\{b,c\}) + P(\{a\}) = P(\{a,b,c\}) = 1$

donc si on note $x = P(\{a\})$, $y = P(\{b\})$, $z = P(\{c\})$, on a

$$\begin{cases} x + y = \frac{2}{3} \\ y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + x = 1 \end{cases}$$

d'où $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{6}$, $z = \frac{1}{3}$

donc $P(\{a,c\}) = P(\{a\}) + P(\{c\})$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

Exo 3 : l'univers est ici l'ensemble des parties à 4 éléments de l'ensemble des 20 chaussures ; si on numérote les chaussures de 1 à 20, on a donc

$$\Omega = \{Q \subset [\![1,20]\!] \mid \#Q = 4\} \quad \text{ainsi } \#\Omega = \binom{20}{4}$$

la probabilité est prise uniforme sur Ω (on prend les chaus. au hasard)

a) il y a 10 paires de chaussures, ainsi il y a $\binom{10}{2}$ choix de 2 paires parmi ces 10 paires, d'où la probabilité

$$P_2 = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{\cancel{10\times 9}}{\cancel{2}} \times \frac{4\times 3\times \cancel{2\times 1}}{\cancel{20}\times 19\times \cancel{18}\times 17}$$

$$\text{et } P_2 = \frac{3}{19\times 17} = \boxed{\frac{3}{323}}$$

b) le contraire est plus facile : $A =$ "aucune paire de chaussure"
comptons les quadruplets (c_1, c_2, c_3, c_4) sans paire : c_1 a 20 choix, c_2 en a $19-1$ car (c_1, c_2) ne doit pas faire une paire, c_3 en a alors $18-2$, et c_4, $17-3$ d'où $20\times 18\times 16\times 14$ choix. Or l'ordre n'importe pas dans les 4 chaussures : plusieurs quadruplets donnent la même partie à 4 éléments, autant que de permutations de 4 éléments : $4!$ Ainsi on a $\frac{20\times 18\times 16\times 14}{4!}$ choix si on ne veut aucune paire.

D'où la proba d'avoir au moins une paire :

$$P_{12} = 1 - \frac{\cancel{20\times 18}\times 16\times 14}{\cancel{4!}}\,\frac{\cancel{4!}}{\cancel{20}\times 19\times \cancel{18}\times 17} = 1 - \frac{224}{323}$$

$$\boxed{P_{12} = \frac{99}{323}}$$

c) avec ce qui précède, avoir une et une seule paire s'obtient avec la proba $P_1 = P_{12} - P_2 = \boxed{\frac{96}{323}}$

Exo 4 : ① Supposons que le gardien n'essaie pas la même clef deux fois : il sera de bon ton de considérer l'univers $\Omega = \mathfrak{S}_n$, l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, en numérotant les clefs de 1 à n. Disons que la bonne clé est la clé n.
Notons A_k l'événement "la porte s'ouvre à la kième clef".

les clés étant prises au hasard, la probabilité est uniforme sur Ω. Ainsi
$$A_k = \left\{ (c_1, \dots, c_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i,j\ i \neq j \Rightarrow c_i \neq c_j \\ \forall i, c_i \in [\![1,n]\!] \\ \text{et } c_k = n \end{array} \right\}$$

d'où chaque élément de A_k correspond à une permutation de $[\![1, n-1]\!]$ pour choisir les clefs des essais différents de k. On a donc $\#A_k = (n-1)!$

Ainsi $P(A_k) = \dfrac{(n-1)!}{\#\Omega} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \boxed{\dfrac{1}{n}}$ et ce, pour tout k.

Remarquons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = n \times \frac{1}{n} = 1$.

② On peut aussi raisonner avec des probabilités conditionnelles.
Dans ce cas $\Omega = [\![1,n]\!]^2 = \{(c,k) \mid \text{clef } c \text{ et essai } k\}$
Supposons que la bonne clé est la clef n.
Notons B_k l'événement "la porte s'ouvre à l'essai k"
et A_k ——————————— et pas avant"

alors, avec la formule des proba. composées, puisque

$A_k = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \neq \emptyset$ (il est possible que la porte s'ouvre au kième coup et pas avant !)

on a
$$P(A_k) = P(\overline{B_1})\, P(\overline{B_2} \mid \overline{B_1}) \dots P(\overline{B_{k-1}} \mid \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-2}}) \times P(B_k \mid \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}})$$
$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1}$$
$$= \boxed{\frac{1}{n}}$$

reste n-2 clefs qui ne marchent pas, on a mis celle du premier échec de côté...

reste n-1 clefs à tester, car

Exo 5 Ici $\Omega = \mathfrak{S}_{41}$, l'ensemble des permutations de $[\![1,41]\!]$, avec la probabilité uniforme : une pile de copie rangées au hasard donne une permutation de $[\![1,41]\!]$

a) l'ordre alphabétique est une permutation parmi les autres, la proba recherchée est $\boxed{\frac{1}{41!}}$ soit $\boxed{2{,}9\ 10^{-50}}$ (faible !)

b) pour les $41-k$ copies restantes, l'ordre est libre d'où $(41-k)!$ possibilités et une proba de $\boxed{\frac{(41-k)!}{41!}}$

Exo 6 Ici l'univers Ω est l'ensemble des injections (car pas de remise) de $[\![1,4]\!]$ dans $\{b_1,\dots,b_5,n_1,\dots,n_4\}$: si $f\in\Omega$, $k\in[\![1,4]\!]$ $f(k)$ est la boule tirée au $k$ième coup.

Notons B_k l'évènement "on tire une boule blanche au coup k"

Alors l'évènement qui nous intéresse est $B_1\cap B_2\cap N_1\cap N_2$

Il n'est clairement pas impossible, donc avec la formule des proba. composées, on a :

$$P(B_1\cap B_2\cap N_1\cap N_2)=P(B_1)\,P(B_2|B_1)\,P(N_1|B_1\cap B_2)\,P(N_2|B_1\cap B_2\cap N_1)$$

$$=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$$

$$=\boxed{\frac{5}{63}}$$

car on tire au hasard dans l'urne donc Ω est muni de la probabilité uniforme.

Exo 7 Comme on remet la boule après l'avoir tirée, on peut prendre l'univers $\Omega = \{R, N\}^n$ et on prend la probabilité uniforme ("hasard")

R : boule rouge
N : — noire.

a) $\overline{A_n}$ est "soit les boules sont toutes rouges, soit elles sont toutes noires"

on a alors $P(\overline{A_n}) = P(\{(R, \dots, R), (N, \dots, N)\}) = \frac{2}{\#\Omega} = \frac{2}{2^n}$

donc $\boxed{P(A_n) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$

on a $B_n = \{(N, \dots, N)\} \cup \{(\underset{\uparrow 1}{R}, N, \dots, N), (N, \underset{\uparrow 2}{R}, N, \dots, N), \dots, (N, \dots, N, \underset{\uparrow n}{R})\}$

d'où $\boxed{P(B_n) = \frac{1+n}{2^n}}$

b) $\underline{n=2}$: $A_2 = \{(R,N), (N,R)\}$ $B_2 = \{(N,N), (R,N), (N,R)\}$

$A_2 \cap B_2 = A_2$ $P(A_2) = \frac{1}{2}$ $P(B_2) = \frac{3}{4}$

donc $P(A_2 \cap B_2) \neq P(A_2) \times P(B_2) \Rightarrow$ $\boxed{A_2 \text{ et } B_2 \text{ ne sont pas indépendants.}}$

$\underline{n=3}$: $A_3 = \{(R,R,N), (R,N,R), (N,R,R), (R,N,N), (N,R,N), (N,N,R)\}$

$B_3 = \{(N,N,N), (R,N,N), (N,R,N), (N,N,R)\}$

$A_3 \cap B_3 = \{(R,N,N), (N,R,N), (N,N,R)\}$

donc $P(A_3 \cap B_3) = \frac{3}{8}$ $P(A_3) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $P(B_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

d'où $P(A_3 \cap B_3) = P(A_3)\, P(B_3)$

$\Rightarrow$ $\boxed{A_3 \text{ et } B_3 \text{ sont indépendants.}}$

$\underline{n \geq 2}$: $A_n \cap B_n =$ "une seule boule rouge" $= \{(\underset{1}{R}, N, \dots, N), (N, \underset{2}{R}, N, \dots, N), \dots, (N, \dots, N, \underset{n}{R})\}$ donc $P(A_n \cap B_n) = \frac{n}{2^n}$

Donc $\underline{A_n \text{ et } B_n \text{ indépendants}}$ ssi $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \Leftrightarrow 2^{n-1} = n+1$

donc ssi $\boxed{n = 3}$ (si $n > 3$, $2^{n-1} > n+1$, car $(2^{n-1} - n - 1) \nearrow_{n \geq 2}$)

Exo 8 Notons B_i le fait de tirer une boule blanche dans U_i
et N_i ——— noire ———.

a) l'événement A qui nous intéresse est $A = N_1 \cap N_2 \cap N_3$
avec la formule des proba. composées on a

$$P(A) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)\, P(N_2 | N_1)\, P(N_3 | N_1 \cap N_2)$$

or $P(N_2 | N_1) = P(N_2)$ (N_1 et N_2 sont indépendants)

donc $P(A) = \cancel{\frac{2}{4}} \times \cancel{\frac{2}{4}} \times \frac{4}{6}$ → car on a ajouté 2 b. noires à U_3

d'où $\boxed{P(A) = \frac{1}{6}}$

b) l'événement est B_3, et dépend des 2 premiers tirages.
Séparons les cas en un système complet :
$(N_1 \cap N_2, N_1 \cap B_2, B_1 \cap N_2, B_1 \cap B_2)$
avec la formule des probas totales on obtient :

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(B_3 | N_1 \cap N_2)\, P(N_1 \cap N_2) && = \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &+ P(B_3 | N_1 \cap B_2)\, P(N_1 \cap B_2) && + \frac{3}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &+ P(B_3 | B_1 \cap N_2)\, P(B_1 \cap N_2) && + \frac{3}{6} \times \text{—''—} \\ &+ P(B_3 | B_1 \cap B_2)\, P(B_1 \cap B_2) && + \frac{4}{6} \times \text{—''—} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) on cherche la proba d'une cause : utilisons le théo. de Bayes pour 2 événements : B_3 et $B_1 \cap B_2$ (*)

$$P(B_1 \cap B_2 | B_3) = \frac{P(B_3 | B_1 \cap B_2)\, P(B_1 \cap B_2)}{P(B_3)}$$

$$= \frac{4/6 \times 1/2 \times 1/2}{1/2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(*) car ils sont tous 2 non négligeables.

Exo 10 On veut $P(\{k\}) = \lambda k$, $\lambda \in \mathbb{R}$

or $\sum_{k=1}^{n} P(\{k\}) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{k\}\right) = P(\Omega) = 1$

donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda k = 1$ d'où $\lambda = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k} = \dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

donc $\boxed{P(\{k\}) = \dfrac{2k}{n(n+1)}}$

Exo 11 on doit avoir $P(\{a,b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = x$ car $\{a\}$ et $\{b\}$ disjoints

de même $P(\{b\}) + P(\{c\}) = y$

ainsi que $P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) = 1$

et $P(\{a\}), P(\{b\}), P(\{c\}) \in [0,1]$

Ainsi $x + P(\{c\}) = 1$, or $x \geqslant 0$ car

$y + P(\{a\}) = 1$, or $y \geqslant 0$ car

et $P(\{b\}) = x - P(\{a\})$
$= x - (1-y)$
$= x + y - 1$

d'où $\underline{x, y \in [0,1] \text{ et } x+y \geqslant 1}$

Inversement, si $x, y \in [0,1]$ avec $x + y \geqslant 1$,

posons $P(\{a\}) = 1 - y$, $P(\{c\}) = 1 - x$,

et $P(\{b\}) = 1 - (P(\{a\}) + P(\{b\})) = 1 - (2 - x - y)$
$= x + y - 1$

on a bien $P(\{a\}), P(\{b\}), P(\{c\}) \in [0,1]$

avec $P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) = 1$

On prend alors la probabilité engendrée par P.

D'où la C.N.S. $\boxed{x, y \in [0,1] \text{ et } x + y \geqslant 1}$

$\boxed{\text{Exo 12}}$ on a $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

donc $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$

car $P(A\cup B)\leq 1$

or $P(A\cap B)\geqslant 0$

donc $\underline{P(A\cap B)\geqslant \max\left(0,\ P(A)+P(B)-1\right)}$

on a $A\cap B\subset A$, donc $P(A\cap B)\leq P(A)$

de même $''$ $\subset B$ ——— $P(B)$

d'où $\underline{P(A\cap B)\leq \min\left(P(A),P(B)\right)}$

$\boxed{\text{Exo 13}}$ * $P(A\cap B\mid A\cup B)=\dfrac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}\underset{\uparrow}{=}\dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}$

car $(A\cap B)\subset(A\cup B)$

remarquons que $P(A)>0\Rightarrow P(A\cup B)>0$ car $A\subset B$
$\Rightarrow P(A)\leq P(B)$.

* $P(A\cap B\mid A)=\dfrac{P((A\cap B)\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

* or $A\subset A\cup B$ donc $P(A)\leq P(A\cup B)$

donc $\boxed{P(A\cap B\mid A\cup B)\leqslant P(A\cap B\mid A)}$

$\boxed{\text{Exo 14}}$ Notons A_i = "le trésor est dans le coffre i"

on a $P(A_i)=\dfrac{p}{N}$, les coffres étant équiprobables,

et car $\sum_{i=1}^{N}P(A_i)=p$. On cherche $P(A_N\mid \overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_{N-1})$,

or $P(\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_{N-1})=1-P(A_1\cup\dots\cup A_{N-1})\underset{\uparrow}{=}1-\left(P(A_1)+\dots+P(A_{N-1})\right)$

$=1-\dfrac{(N-1)p}{N}$ les A_i sont incompatibles

donc $P(A_N\mid\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_{N-1})\underset{\text{des proba. cond.}}{=}\dfrac{P(A_N\cap(\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_{N-1}))}{P(\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_{N-1})}\underset{\uparrow}{=}\dfrac{P(A_N)}{1-\dfrac{(N-1)p}{N}}$

car $A_N\subset\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_{N-1}$

or $P(A_N)=\dfrac{p}{N}$, donc $''=\boxed{\dfrac{p}{N-(N-1)p}}$

Exo 15 voir le cours : $(B, \bar{B})$ système complet.

Exo 16 notons p_n cette probabilité. On a $p_1 = \frac{b}{b+r}$

pour $n=2$: 2 cas se présentent selon le 1er tirage :

- si on a tiré une boule blanche : on ajoute d boules blanches, ainsi on a $\frac{b+d}{b+d+r}$ pour la proba d'avoir une blanche
- sinon, on ajoute d rouges, et la proba est $\frac{b}{b+d+r}$

Ainsi $p_2 = p_1 \times \frac{b+d}{b+d+r} + (1-p_1)\frac{b}{b+d+r}$

$$= \frac{b}{b+r}\frac{b+d}{b+d+r} + \frac{r}{b+r}\frac{b}{b+d+r} = \frac{b}{b+r} \ !$$

Montrons $\forall n \geq 1$, $p_n = \frac{b}{b+r}$ par récurrence sur n :

supposons que $\forall i \leq n$, $p_i = \frac{b}{b+r}$.

Soit A_k = "on a tiré k boules blanches jusqu'au tirage n". Alors $P(A_k) = \binom{n}{k}\underbrace{\left(\frac{b}{b+r}\right)^k}_{k \text{ blanches}}\underbrace{\left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k}}_{n-k \text{ rouges}}$

[choix des k tirages parmi n, chacun ayant la même proba. par hyp. de réc.

Par la formule des proba. totales on a alors

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{\frac{b+dk}{b+r+nd}}_{\text{proba de tirer une blanche au tirage } n+1 \text{ sachant qu'on en a tiré } k \text{ avant.}}\left(\frac{b}{b+r}\right)^k\left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k} \text{ or } \underbrace{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

$$\text{donc } p_{n+1} = \frac{1}{b+r+nd}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b\left(\frac{b}{b+r}\right)^k\left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{bnd}{b+r}\left(\frac{b}{b+r}\right)^k\left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-1-k}\right]$$

$$= \frac{1}{b+r+nd}\Bigg[b\underbrace{\left(\frac{b}{b+r}+\frac{r}{b+r}\right)^n}_{1} + \frac{bnd}{b+r}\underbrace{\left(\frac{b}{b+r}+\frac{r}{b+r}\right)^{n-1}}_{1}\Bigg] = \boxed{\frac{b}{b+r}}$$

Ce qui conclut la récurrence !

$\boxed{\text{Exo 17}}$ Notons A_i = "on tire une boule noire au tirage i"

on cherche $P(A_3)$, mais A_3 dépend des tirages précédents :

considérons le système complet $(A_1\cap A_2, A_1\cap \overline{A_2}, \overline{A_1}\cap A_2, \overline{A_1}\cap\overline{A_2})$

Avec la formule des probas. totales (voyant que les événements du système complet ne sont clairement pas négligeables)

on a
$$\begin{aligned}P(A_3) &= P(A_3|A_1\cap A_2)\,P(A_1\cap A_2)\\ &+ P(A_3|A_1\cap\overline{A_2})\,P(A_1\cap\overline{A_2})\\ &+ P(A_3|\overline{A_1}\cap A_2)\,P(\overline{A_1}\cap A_2)\\ &+ P(A_3|\overline{A_1}\cap\overline{A_2})\,P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 0\times \cdots\\ &+ \frac{1}{8}\times P(A_1\cap\overline{A_2})\\ &+ \frac{1}{8}\times P(\overline{A_1}\cap A_2)\\ &+ \frac{2}{8}\times P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})\end{aligned}$$

or $P(A_1\cap\overline{A_2}) = P(\overline{A_2}|A_1).P(A_1) = \frac{8}{9}\times\frac{2}{10}$

$P(\overline{A_1}\cap A_2) = P(A_2|\overline{A_1})\times P(\overline{A_1}) = \frac{2}{9}\times\frac{8}{10}$

$P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}) = P(\overline{A_2}|\overline{A_1})\times P(\overline{A_1}) = \frac{7}{9}\times\frac{8}{10}$

d'où $P(A_3) = \cancel{\frac{1}{8}}\times\cancel{\frac{8}{9}}\times\frac{2}{10} + \frac{1}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{8}{10} + \frac{2}{\cancel{8}}\times\frac{7}{9}\times\frac{\cancel{8}}{10}$

$= \frac{1}{45} + \frac{1}{45} + \frac{7}{45} = \frac{9}{45}$

donc $\boxed{P(A_3) = \frac{1}{5}}$

Exo 18

a) Dans l'urne d'indice k, la probabilité de tirer une boule blanche vaut k/N.

Dans cette même urne, la probabilité de tirer une succession de n boules blanches vaut $(k/N)^n$.

Par la formule des probabilités totales, la probabilité qu'après choix d'une urne, nous tirions une succession de n boules blanches vaut

$$\pi_n = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

Notons A_k l'événement, la boule tirée lors du k-ième tirage est une boule blanche

La probabilité conditionnée cherchée vaut

$$P(A_{n+1} \middle| A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1})}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)}$$

avec

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \pi_n$$

donc

$$P(A_{n+1} \middle| A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{N} \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} k^{n+1}}{\sum\limits_{k=0}^{N} k^n}$$

b) Par somme de Riemann, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

En adaptant quelque peu l'expression, on obtient

$$\pi_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{n+1}$$

donc

$$P(A_{n+1} \middle| A_1 \cap \ldots \cap A_n) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{n+1}{n+2}$$

Exo 19

Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a

$$P(M) = 10^{-4},\ P(T|M) = 0{,}99 \text{ et } P(T|\overline{M}) = 10^{-3}$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})P(\overline{M})$$

puis par la formule de Bayes

$$P(M|T) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)}$$

ce qui numériquement donne 9 %.

La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif ! Cela s'explique aisément car la population de malade est de $1/10\,000$ et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de $1/1\,000$.