Corrigé
TD 14 : polynomes

Exercice 1
(3991)

On va chercher une racine sous la forme p/q, avec $p \wedge q = 1$ et $q \geq 1$. L'équation s'écrit

$$2\frac{p^3}{q^3} - \frac{p^2}{q^2} - \frac{p}{q} - 3 = 0.$$

On multiplie tout par q^3 et on trouve

$$2p^3 - p^2q - pq^2 - 3q^3 = 0.$$

Puisque $q| - p^2q - pq^2 - 3q^3$ et que $q \wedge p = 1$, on en déduit que $q|2$, et donc que $q = 1$ ou 2. De même, puisque $p|2p^3 - p^2q - pq^2$ et que $p \wedge q = 1$, on trouve que $p|3$, ce qui donne $p \in \{-3, -1, 1, 3\}$. On trouve ensuite facilement à partir de ces informations que $3/2$ est racine de P.

Puisque $3/2$ est racine de P, on va factoriser le polynôme par $X - 3/2$, ou plutôt par $2X - 3$. On trouve

$$2X^3 - X^2 - X - 3 = (2X - 3)(X^2 + X + 1).$$

Reste à factoriser $X^2 + X + 1$ sur $\mathbb{C}$. Ses racines sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que

$$P(X) = (2X - 3)\left(X - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Exercice 2
(3992)

On réalise la division euclidienne de $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ par $X^2 + 2$, et on trouve :

$$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2 + 2)(X^2 + X + (\lambda - 2)) + (\mu - 2)X + 6 - 2\lambda.$$

Le polynôme $X^2 + 2$ divise donc $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ si et seulement si le reste est nul, donc si et seulement si $\mu = 2$ et $\lambda = 3$.
 Une autre possibilité est de remarquer que les racines de $X^2 + 2$ sont $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$, et donc que la décomposition en produits d'irréductibles de $X^2 + 2$ est $(X - 2i)(X + 2i)$. Pour que $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ soit divisible par $X^2 + 2$, il faut et il suffit que $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$ soient racines de $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$. On évalue ce polynôme en $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$ et on trouve un système linéaire que doit vérifier le couple (λ, μ). On trouve bien sûr la même solution.

Exercice 3
(3995)

Le polynôme nul est évidemment solution. Sinon, si P est solution, alors on a

$$2\deg(P) = \deg(P) + 2$$

ce qui prouve que $\deg(P)$ doit être égal à 2. Maintenant, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors

$$\begin{aligned} P(X^2) &= aX^4 + bX^2 + c \\ (X^2 + 1)P(X) &= aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c. \end{aligned}$$

On en déduit que $b = 0$, puis que $a + c = 0$. Les solutions sont donc les polynômes qui s'écrivent $P(X) = a(X^2 - 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Là encore, le polynôme nul est solution, et c'est la seule solution constante. Par ailleurs, si P est une solution non constante, alors son degré vérifie l'équation

$$2(\deg(P) - 1) = \deg(P)$$

ce qui entraîne que $\deg(P) = 2$. Maintenant, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors

$$\begin{aligned} P'^2 &= (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2 \\ 4P &= 4aX^2 + 4bX + 4c. \end{aligned}$$

Ceci entraîne $a^2 = a$, donc $a = 1$ (le polynôme est de degré 2, $a \neq 0$), puis $c = b^2/4$. Les polynômes solutions sont donc le polynôme nul et les polynômes $P(X) = X^2 + bX + b^2/4$, avec $b \in \mathbb{R}$.

Si P est une solution qui n'est pas le polynôme nul, alors le degré de $P \circ P$ vaut $\deg(P)^2$, et donc on a l'équation

$$\deg(P)^2 = \deg(P).$$

et donc $\deg(P) = 1$ ou $\deg(P) = 0$. Maintenant, si $P(X) = aX + b$, alors

$$\begin{aligned} P \circ P(X) &= a(aX + b) + b = a^2X + (ab + b) \\ P(X) &= aX + b. \end{aligned}$$

On doit donc avoir $a^2 = a$, soit $a = 1$ ou $a = 0$, et $ab = 0$. Si $a = 1$, alors $b = 0$ et si $a = 0$, alors b peut être quelconque dans $\mathbb{R}$. Finalement, on trouve que les solutions sont les polynômes constants et le polynôme $P(X) = X$.

Exercice 4
(3997)

On trouve les résultats suivants :

Le quotient est $X^2 + 2X + 7$, le reste est nul ;

Le quotient est $X^2 - 3X - 5$, le reste est $X + 3$;

Le quotient est $X^3 - X - 1$, le reste est $X + 3$.

Exercice 5
(4004)

On applique l'algorithme d'Euclide. Le dernier reste non-nul donne un pgcd des deux polynômes. On a successivement :

$$\begin{aligned} X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 &= (X^3 - 3X^2 + 3X - 2)X + (-2X^2 + 2X + 4) \\ X^3 - 3X^2 + 3X - 2 &= (-2X^2 + 2X + 4)\left(\frac{-X}{2} + 1\right) + 3X - 6 \\ (-2X^2 + 2X + 4) &= (3X - 6) \times \left(\frac{-2X}{3} - \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Un pgcd est donc $3X - 6$ (ou $X - 2$).

On répète le même procédé :

$$\begin{aligned} X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1 &= (X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1)1 + 2X^3 - 4X^2 + 4X - 2 \\ X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1 &= (2X^3 - 4X^2 + 4X - 2)((X^2)/2 + X/2) + X^2 - X + 1 \\ 2X^3 - 4X^2 + 4X - 2 &= (X^2 - X + 1)(2X - 2) + 0 \end{aligned}$$

Un pgcd des deux polynômes est donc $X^2 - X + 1$.

Les diviseurs non-constants de Q sont les polynômes du type $c(X-1)^p$, avec $1 \leq p \leq n$. Parmi ces diviseurs, seuls ceux de la forme $c(X-1)$ divisent aussi P (par exemple, car 1 est racine simple et non double de P, ou bien parce qu'on sait comment décomposer P en produits d'irréductibles...). Ainsi, $P \wedge Q = X - 1$.

Exercice 6
(4010)

Considérons les polynômes de Lagrange $L_{-1},\ L_0$ et L_1 associés au triplet $(-1, 0, 1)$. Ils sont donnés par

$$L_{-1}(X) = \frac{X(X-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{X^2 - X}{2},$$

$$L_0(X) = \frac{(X+1)(X-1)}{(0+1)(0-1)} = -(X^2-1),$$

$$L_1(X) = \frac{(X+1)X}{(1+1)1} = \frac{X^2+X}{2}.$$

Alors un polynôme qui convient est le polynôme

$$P_0(X) = 1L_{-1}(X) - 1L_0(X) - 1L_1(X) = X^2 - X - 1.$$

C'est le seul qui convient, car si P est un polynôme de degré (inférieur ou égal à) 2 qui convient, alors $P - Q$ est de degré au plus 2 et admet au moins 3 racines : c'est donc le polynôme nul.

Soit P un tel polynôme. Alors, utilisant le polynôme P_0 introduit à la question précédente, et posant $Q = P - P_0$, on a $Q(-1) = Q(0) = Q(1) = 0$. Autrement dit, Q est divisible par $(X+1)X(X-1) = X^3 - X$, et P s'écrit

$$P(X) = X^2 - X - 1 + A(X)(X^3 - X)$$

avec $A \in \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, tous les polynômes de cette forme conviennent.

Exercice 7
(4012)

Notons $x_1,\ x_2$ et x_3 les trois racines, avec par exemple $x_3 = x_1 + x_2$. Alors les relations coefficients/-racine nous disent que $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. En particulier, on trouve $x_3 = 4$, et donc P se factorise en $P(X) = (X-4)Q(X)$. La division euclidienne donne $Q(X) = X^2 - 4X + 7$, dont les racines sont $2 + i\sqrt{3}$ et $2 - i\sqrt{3}$.

On va utiliser les relations coefficients/racines. Pour cela, on développe

$$(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) =$$

$$X^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)X^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)X^2 -$$

$$(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)X + x_1x_2x_3x_4.$$

On sait que

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \implies x_3 + x_4 = -2.$$

De plus,

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0.$$

On peut réécrire ceci en

$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0$$

soit

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 4.$$

On a également

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -12.$$

Ceci donne

$$x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -12 \implies x_1x_2 - x_3x_4 = 6.$$

Ceci suffit à déterminer $x_1x_2 = 5$ et $x_3x_4 = -1$.

De $x_1 + x_2 = 2$ et $x_1x_2 = 5$, on tire que x_1 et x_2 sont les racines de $X^2 - 2X + 5$, ie $1 \pm 2i$. De même, x_3 et x_4 sont les racines de $X^2 + 2X - 1$, ie $-1 \pm \sqrt{2}$.

Exercice 8
(4017)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x^2 + 1) = \big(P(x)\big)^2 + 1$. Pour $x = 0$, on trouve $P(1) = 1$. Pour $x = 1$, on trouve $P(2) = 2$. Pour $x = 2$, on trouve $P(5) = 5$. Pour $x = 5$, on trouve $P(5^2 + 1) = 5^2 + 1$. Ceci nous incite à considérer la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ et $u_0 = 0$. Il est aisé de prouver que cette suite est strictement croissante. De plus, on prouve par récurrence sur n que $P(u_n) = u_n$. En effet, la propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$. Si elle est vraie au rang n, alors on a

$$P(u_{n+1}) = P(u_n^2 + 1) = \big(P(u_n)\big)^2 + 1 = u_n^2 + 1 = u_{n+1}$$

ce qui prouve l'hérédité.
 Posons alors $Q(X) = P(X) - X$. Q est un polynôme qui s'annule en chaque u_n. Comme les u_n sont tous différents, Q admet une infinité de racines. Donc Q est identiquement nulle et on a $P(X) = X$. Réciproquement, X convient.

Exercice 9
(4021)

On commence par chercher les racines complexes pour factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis on regroupe les racines complexes conjuguées.

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= (X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{7i\pi/4})(X - e^{9i\pi/4}) \\ &= \big((X - e^{i\pi/4})(X - e^{9i\pi/4})\big)\big((X - e^{3i\pi/4})(X - e^{7i\pi/4})\big) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1). \end{aligned}$$

Les deux polynômes de degré 2 que l'on obtient n'ont pas de racines réelles, ils sont donc irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

On commence par utiliser une identité remarquable, puis la réponse à la question précédente :

$$\begin{aligned} X^8 - 1 &= (X^4 - 1)(X^4 + 1) \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1). \end{aligned}$$

On commence par factoriser le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ en remarquant qu'il s'agit alors d'une différence de deux carrés :

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 - X + 1)^2 - i^2 = (X^2 - X + 1 - i)(X^2 - X + 1 + i).$$

On factorise alors chacun des polynômes de degré 2 dans $\mathbb{C}$, par exemple en calculant leur discriminant ou en remarquant que i (resp. $-i$) sont des racines évidentes. On trouve :

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X + i)(X - 1 - i)(X - i)(X - 1 + i).$$

En regroupant les termes conjugués, on trouve finalement :

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2).$$

Exercice 10
(4022)

On écrit simplement

$$X^4 - 6X^3 + 9X^2 = X^2(X^2 - 6X + 9) = X^2(X - 3)^2.$$

L'astuce(?) est d'écrire $9 = -(3i)^2$, et de reconnaitre une différence de deux carrés. Donc on a :

$$\begin{aligned} X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9 &= \big(X(X-3)\big)^2 - (3i)^2 \\ &= \big(X(X-3) - 3i\big)\big(X(X-3) + 3i\big) \\ &= (X^2 - 3X - 3i)(X^2 - 3X + 3i). \end{aligned}$$

On factorise chacun de ces deux polynômes. Le discriminant du premier est $9 + 12i = (\sqrt{3}(2 + i))^2$. Ses racines sont $\alpha_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Le discriminant du second est $9 - 12i = (\sqrt{3}(2 - i))^2$, et ses racines sont $\beta_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. La décomposition de P en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est donc

$$(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \beta_1)(X - \beta_2).$$

Pour obtenir la décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines complexes conjuguées, à savoir α_1 et β_1 d'une part et α_2 et β_2 d'autre part. On trouve

$$P = \big(X^2 - (2\sqrt{3} + 3)X + 3\sqrt{3} + 6\big)\big(X^2 + (2\sqrt{3} - 3)X - 3\sqrt{3} + 6\big).$$