

TD 14 : polynômes

Exercice 1

(3991)

Décomposition à partir d'une racine

On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$.

Déterminer une racine rationnelle de P .

En déduire la factorisation de P en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2

(3992)

A paramètres

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 3

(3995)

Quelques équations

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
2. $P'^2 = 4P$
3. $P \circ P = P$.

Exercice 4

(3997)

En pratique!

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

$X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;

$X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;

$X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

Exercice 5

(4004)

Calculs de pgcd

Déterminer les pgcd suivants :

$P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$;

$P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $Q(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$;

$P(X) = X^n - 1$ et $Q(X) = (X - 1)^n$, $n \geq 1$.

Exercice 6

(4010)

Polynômes définis par certaines valeurs

Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est-il unique ?

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$.

Exercice 7

(4012)

Déterminer les racines sachant que...

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les racines de polynômes de degré 3 ou 4 connaissant des informations sur ces racines.

Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Soit $Q(X) = X^4 + 12X - 5$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de Q . On sait que $x_1 + x_2 = 2$.

Déterminer la valeur de x_1x_2, x_3x_4 et $x_3 + x_4$.

En déduire les valeurs des racines.

Exercice 8

(4017)

Équation

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = (P(X))^2 + 1$

Exercice 9

(4021)

Décomposer !

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + 1$
2. $X^8 - 1$
3. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

Exercice 10

(4022)

Décomposer !

Soit P le polynôme $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

