DM 17

Exercice 1:
Montrer que la famille (1,2,3), (4,5,8), (9,6,7), (-3,2,8) n'est pas linéairement indépendante dans R^3.

Exercice 2:
Montrer que si la famille v_1, v_2, v_3, v_4 est génératrice d'un espace vectoriel V, alors la famille

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

est également famille génératrice de V.

Exercice 3:
Soit U le sous espace vectoriel de R^5 défini par

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ tels que } x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_5 = 0\}.$$

(a) Trouver une base de U.
(b) Étendre cette base en une base de R^5.

Exercice 4

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$u_1 = (0, 1, -2, 1), \quad u_2 = (1, 0, 2, -1), \quad u_3 = (3, 2, 2, -1), \quad u_4 = (0, 0, 1, 0).$$

Dire, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\operatorname{vect}(u_1, u_2, u_3) = \operatorname{vect}\big((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\big)$;
2. $(1, 1, 0, 0) \in \operatorname{vect}(u_1, u_2) \cap \operatorname{vect}(u_2, u_3, u_4)$;
3. $\operatorname{vect}(u_1, u_2) + \operatorname{vect}(u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$.

Exercice 5

Pour chacun des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ suivants, déterminer s'ils sont en somme directe.

1. $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}\right\}$;
2. $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}\right\}$.

Exercice 6

Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Démontrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = h(x) - (ax + b)$ vérifie $f \in F$.
4. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.