DS7

durée 4h

Exercice 1: déterminant.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \ldots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$

Exercice 2: déterminants circulants.

On considère n nombres complexes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, on pose $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$, puis :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S_p = a_0 + a_1\omega^p + a_2\omega^{2p} + \cdots + a_2(\omega^p)^{n-1}.$$

On désigne par A et M les deux matrices d'ordre n suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

a) Calculer M^2 et en déduire son déterminant.

b) Calculer AM et MAM en fonction de $S_0, \ldots, S_{n-1}$, et en déduire le déterminant de A.

Problème: endomorphismes cycliques

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour tout endomorphisme u de E, on note $u^0 = Id_E$ (application identité de E), et pour tout entier naturel k, $u^{k+1} = u^k \circ u$.

Si $Q(X) = q_0 + q_1X + \cdots + q_mX^m \in \mathbb{K}[X]$, on pose pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$Q(u) = q_0Id_E + q_1u + \cdots + q_mu^m \in \mathcal{L}(E).$$

On dit qu'un endomorphisme u de E est cyclique s'il existe un élément $x_0 \in E$ tel que :

$$E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N}) = Vect(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots).$$

Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.

Partie I. Exemples.

1. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^3$. Considérons l'application suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$u(x, y, z) = (6z, x - 11z, y + 6z).$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer $u(1, 0, 0)$ et $u^2(1, 0, 0)$. En déduire que u est un endomorphisme cyclique.

2. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'endomorphisme de dérivation u défini pour tout $P \in E$ par $u(P) = P'$.

   (a) Soit $P_0 \in E$ un polynôme de degré $d \geq 0$. Montrer que $Vect(u^k(P_0)/k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}_d[X]$.

   (b) u est-il cyclique ?

3. Dans cette question, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p \geq 2$ (i.e. $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$).

   (a) Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre.
   Que peut-on en déduire sur p ?

   (b) En déduire que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

Partie II. Étude générale.

Dans cette partie, on note u un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E, avec E de dimension $n \geq 1$. On fixe $x_0 \in E$ tel que $E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N})$.

1. (a) Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^n(x_0))$ est liée.

   (b) Montrer qu'il existe un entier p, maximal, pour lequel la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$ soit libre.

   (c) Montrer que $u^{p+1}(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$.

   (d) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$.

   (e) En déduire que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$ est une base de E, et que $p = n - 1$.

2. (a) Justifier l'existence de $(p_0, \ldots, p_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$u^n(x_0) = p_0 x_0 + p_1 u(x_0) + \cdots + p_{n-1} u^{n-1}(x_0).$$

   Dans la suite, on posera $P(X) = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \cdots - p_1 X - p_0 \in \mathbb{K}[X]$.

(b) Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(u)$ des vecteurs de la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$. En déduire que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On dit que P est un polynôme annulateur de u.

(c) Montrer que $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

(d) En déduire que :

- il n'existe aucun polynôme non nul Q de degré strictement inférieur à n tel que $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$;
- P est l'unique polynôme unitaire de degré n tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le polynôme P est appelé le polynôme minimal de u.

(e) Application. Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme u de la Partie I. 1.

Partie III. Étude du commutant.

Dans cette partie, u désigne toujours un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E, avec E de dimension $n \geq 1$. On fixe $x_0 \in E$ tel que $E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N})$. On rappelle qu'alors, la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1. Montrer que le commutant $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E)/u \circ v = v \circ u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Notons $\mathbb{K}[u] = \{Q(u)/Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{K}[u]$ est inclus dans $\mathcal{C}(u)$.

3. (a) Soient deux endomorphismes v et w de $\mathcal{C}(u)$. Montrer que, si $v(x_0) = w(x_0)$, alors $v = w$.

   (b) Soit $v \in \mathcal{C}(u)$.

   i. Justifier l'existence de $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v(x_0) = a_{n-1}u^{n-1}(x_0) + \cdots + a_1 u(x_0) + a_0 x_0$.

   ii. Montrer que $v = a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_1 u + a_0 Id_E$.

4. Décrire $\mathcal{C}(u)$.

5. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$.