TD intégration

Exercice 1
(3555)
En découpant

On note, pour $n \geq 1$,
$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$
Soit également $\alpha \in [0, 1[$.

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n \leq 1$$
(on pourra encadrer $\int_0^\alpha$ puis $\int_\alpha^1$).

Démontrer que (I_n) est croissante.

Déduire des questions précédentes que (I_n) converge vers 1.

En s'inspirant du modèle précédent, étudier
$$J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-n \sin t} dt.$$

Exercice 2
(3556)
Changement de signes

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, une fonction continue non identiquement nulle. On suppose qu'il existe un entier n tel que, pour tout $k \leq n$, on a $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$. On souhaite prouver que, dans l'intervalle $[a, b]$, il existe au moins $n+1$ points où f s'annule en changeant de signe.

Traiter le cas $n = 0$.

Traiter le cas $n = 1$.

Traiter le cas général.

Exercice 3
(3563)
Retrouver la fonction

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et $\int_a^b f(x) dx = b - a$. Que dire de f ?

Exercice 4
(3564)
Intégrale de f et de f^2

Déterminer les fonctions continues $f : [0, 1] \to [0, 1]$ vérifiant $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f^2(t) dt$.

Exercice 5
(3565)
Égalité des valeurs absolues

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt.$$

Montrer que f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 6
(3569)
Limites de suites
Calculer la limite des suites suivantes :
$u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$.
$u_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$.
$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.
$u_n =$

Exercice 7
(3573)
Série harmonique alternée
Pour $n \geq 0$, on définit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$$

Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.
Pour $n \geq 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 8
(3574)
Un équivalent de $\ln(n!)$
Montrer que, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^{i} \ln t\, dt \leq \ln i \leq \int_i^{i+1} \ln t\, dt.$$

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_1^n \ln t\, dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln t\, dt + \ln n.$$

Pour tout $x > 0$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln t\, dt$.
En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9
(3578)
Cesàro pour les intégrales

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie a en $+\infty$. Montrer que

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \to a \text{ quand } x \to +\infty.$$

Exercice 10
(234)

1. Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

2. En déduire

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$$

Exercice 11
(246)
Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\mathrm{sh}\ t}{t} t \neq 0 \ et \ \varphi(0) = 1$$

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
2. Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 12
(248)
Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\mathrm{d}t$$

2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
3. Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 13
(249)
Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale
3. Montrer que F est dérivable en 0 et observer $F'(0) = 0$.

Exercice 14
(250)

1. Montrer que la fonction
$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$$
est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer la limite de f en 0.

Exercice 15
(251)
Soit
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

1. Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$, la limite en $+\infty$ de $f(x)/x$ et montrer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.
3. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 16
(252)
Étude et graphe de la fonction
$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$
On préciser le comportement de la fonction quand $x \to 0$ et quand $x \to \pm\infty$.

Exercice 17
(253)
Soit
$$f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t}\mathrm{d}t$$

1. Étudier la parité de f. On étudie désormais f sur $]0, +\infty[$.
2. Prolonger f par continuité en 0.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Branches infinies, allure.

Exercice 18

(254)
Pour $x \in]0,1[$, on pose

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

1. Montrer que φ est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1.
2. En déduire la valeur de
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$$

Exercice 19

(257)
Pour tout $x \in 1{+}\infty$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3-1}}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction F est bien définie, continue sur $1{+}\infty$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. Exprimer sa dérivée $F'(x)$
2. Étudier la dérivabilité de F en 1. Préciser la tangente au graphe de F en 1.
3. Étudier la limite de F en $+\infty$.
4. Justifier que F réalise une bijection de $1{+}\infty$ sur un intervalle à préciser.
5. Justifier que F^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et solution de l'équation différentielle
$$yy' = \sqrt{y^3-1}$$
6. Étudier la dérivabilité de F^{-1} en 0.