Corrigé
TD intégration

Exercice 1
(3555)

On remarque d'abord que, pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$
Si on intègre cette inégalité entre 0 et 1, alors on trouve
$$I_n \leq \int_0^1 dx = 1.$$
D'autre part, soit $x \in [0,\alpha]$. Alors $1+x^n \leq 1+\alpha^n$ et donc
$$\frac{1}{1+\alpha^n} \leq \frac{1}{1+x^n}.$$
On intègre cette inégalité entre 0 et α et on trouve
$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq \int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^n}.$$
D'autre part, si $x \in [\alpha,1]$, alors
$$\frac{1}{1+x^n} \geq 0 \implies \int_\alpha^1 \frac{dx}{1+x^n} \geq 0.$$
En faisant la somme des deux inégalités précédemment obtenues, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient
$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que, si $x \in [0,1]$, alors
$$x^{n+1} \leq x^n.$$
Il vient
$$\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^{n+1}}$$
et en intégrant cette inégalité, on trouve
$$I_n \leq I_{n+1}.$$
La suite (I_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge vers un réel $\ell \leq 1$. Utilisons maintenant l'inégalité
$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n.$$
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité, on trouve
$$\alpha \leq \ell.$$
On en déduit immédiatement que $\ell \geq 1$. En effet, si $\ell < 1$, alors on peut choisir $\alpha \in]\ell, 1[$, et le résultat dit que $\alpha \leq \ell$ alors qu'on a choisi $\alpha > \ell$. C'est une contradiction et donc $\ell = 1$.

Une autre façon de démontrer ce point est de dire que on peut faire tendre α vers 1 dans l'inégalité $\alpha \leq \ell$, et qu'en passant à la limite, $\alpha = 1$.

Fixons $\alpha \in [0, \pi/2]$. On remarque cette fois que, pour tout $t \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\sin(\alpha) \leq \sin(t) \implies -n\sin(\alpha) \geq -n\sin(t)$$

ce qui entraîne, puisque la fonction exponentielle est croissante,

$$e^{-n\sin t} \leq e^{-n\sin(\alpha)}.$$

Sur l'intervalle $[0, \alpha]$, on majore la fonction à intégrer par 1. En découpant l'intégrale en 2, entre $[0, \alpha]$ et entre $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, on trouve alors que

$$0 \leq J_n \leq e^{-n\sin(\alpha)}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \alpha \leq .$$

De plus, on vérifie que la suite (J_n) est décroissante. Ainsi, elle est convergente et, passant à la limite dans l'égalité précédente, sa limite ℓ vérifie

$$0 \leq \ell \leq \alpha.$$

Finalement, en raisonnant exactement comme précédemment, on trouve $\ell = 0$.

Exercice 2
(3556)

Si $\int_a^b f(t)dt = 0$ et s'il n'existe pas de points où f s'annule en changeant de signe, alors on a $f \geq 0$ ou $f \leq 0$. Dans un cas comme dans l'autre, puisque f est continue, la condition $\int_a^b f(t)dt = 0$ impose que f est identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc f s'annule en changeant de signe en au moins un point.

Par la première question, on sait que f s'annule en changeant de signe en au moins un point c. Supposons que c soit l'unique point où f change de signe, et posons $g(x) = (x - c)f(x)$. Alors g est continue, elle garde un signe constant sur l'intervalle $[a, b]$ et, par hypothèse et linéarité de l'intégrale, elle vérifie

$$\int_a^b g(t)dt = 0.$$

g est donc identiquement nulle. Ceci entraîne que f est nulle, sauf éventuellement en c. Mais par continuité de f en c, f est identiquement nulle : contradiction.

On remarque d'abord que, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$$

pour tout polynôme P. Supposons maintenant que f s'annule en changeant de signes en k points $a_1, \ldots, a_k$, avec $k < n + 1$. Alors la fonction

$$g(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_k)f(x)$$

garde un signe constant, est continue, et vérifie, par la remarque précédente, $\int_a^b g(x)dx = 0$. g est donc identiquement nulle, f aussi, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Exercice 3
(3563)
On remarque que $b-a=\int_a^b 1dx$, et donc que

$$\int_a^b \big(1-f(x)\big)dx=0$$

alors que $x\mapsto 1-f(x)$ est une fonction continue sur $[a,b]$ et positive. C'est donc que $1-f$ est la fonction nulle, ou encore que $f=1$.

Exercice 4
(3564)
Soit f une solution. Alors

$$\int_0^1 \big(f(t)-f^2(t)\big)dt=0 \iff \int_0^1 f(t)\big(1-f(t)\big)dt=0.$$

Or, puisque f est à valeurs dans $[0,1]$, la fonction $t\in[0,1]\mapsto f(t)\big(1-f(t)\big)$ est positive ou nulle. De plus, elle est continue et son intégrale sur $[0,1]$ est nulle. Ainsi, elle est identiquement nulle. Ceci entraine que pour tout $t\in[0,1]$, on a $f(t)=0$ ou $f(t)=1$. On va en réalité prouver que $f=0$ ou que $f=1$ (observez que ce n'est pas la même chose ! Il y a inversion de quantificateurs...).
Supposons en effet qu'il existe t_0 et t_1 dans $[0,1]$ avec $f(t_0)=0$ et $f(t_1)=1$. Alors, puisque f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=1/2$, ce qui ne peut pas être le cas. On en déduit que $f=0$ ou $f=1$.

Réciproquement, ces fonctions sont solutions. On a donc démontré que les seules fonctions continues $f:[0,1]\to[0,1]$ vérifiant $\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f^2(t)dt$ sont les fonctions constantes égales à 0 ou à 1.

Exercice 5
(3565)
Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas le problème), on peut supposer que $\int_a^b f(t)dt\geq 0$. Alors on a

$$\int_a^b \big(|f(t)|-f(t)\big)dt=\int_a^b |f(t)|dt-\int_a^b f(t)dt=0$$

d'après l'hypothèse. Or, la fonction $t\mapsto |f(t)|-f(t)$ est continue et positive, d'intégrale nulle. C'est nécessairement la fonction nulle, donc $f(t)=|f(t)|$ pour tout $t\geq 0$. Autrement dit, f est toujours positive.

Exercice 6
(3569)

On a directement l'écriture sous la forme d'une somme de Riemann :

$$u_n\to\int_0^1 \sin(\pi x)dx=\frac{2}{\pi}.$$

On écrit d'abord :

$$u_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+1/n)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+n/n)^2}\right).$$

On a donc :

$$u_n \to \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On a :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right),$$

et donc :

$$u_n \to \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}.$$

On a :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + \cdots + \ln\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right)\right).$$

Par composition des limites, ceci converge vers :

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(1+x^2)dx\right).$$

L'intégrale se calcule à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1+x^2)dx &= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \\
&= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx \\
&= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 7
(3573)

On majore la fonction à intégrer, plus précisément le dénominateur. En effet, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \implies 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on trouve

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, la suite (I_n) tend vers 0.

On a

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx = \frac{1}{n+1}.$$

Notons $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$. En remplaçant $\frac{1}{k+1}$ par $I_k + I_{k+1}$, on trouve

$$S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots + (-1)^n(I_n + I_{n+1}).$$

De nombreux termes de cette somme se simplifient et on trouve

$$S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

Comme (I_n) tend vers 0, on en déduit que (S_n) converge vers I_0. Reste à calculer cette dernière intégrale. On trouve

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Exercice 8
(3574)

Soit $t \in [i-1, i]$. Alors, puisque la fonction logarithme est croissante, on a

$$\ln(t) \leq \ln(i).$$

On intègre cette inégalité pour t parcourant $[i-1, i]$:

$$\int_{i-1}^{i} \ln(t)dt \leq \int_{i-1}^{i} \ln(i)dt = (i-(i-1))\ln(i) = \ln(i).$$

La deuxième partie de l'inégalité se prouve exactement de la même façon, en remarquant que pour tout t dans $[i, i+1]$, on a

$$\ln(i) \leq \ln(t).$$

On commence par sommer l'inégalité de gauche pour i allant de 2 jusqu'à n. Par la formule de Chasles, le membre de gauche est

$$\int_1^2 \ln(t)dt + \int_2^3 \ln(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^{n} \ln(t)dt = \int_1^n \ln(t)dt.$$

Le membre du milieu vaut lui

$$\sum_{i=2}^{n} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=2}^{n} i\right) = \ln(n!).$$

On somme ensuite la seconde inégalité pour i allant de 1 à $n-1$. On trouve

$$\ln\big((n-1)!\big) \leq \int_1^n \ln(t)dt.$$

Il suffit ensuite d'ajouter $\ln(n)$ de chaque côté de l'inégalité pour obtenir le résultat demandé.

On réalise une intégration par parties, écrivant $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$, d'où

$$F(x) = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}dt = x\ln x - x + 1.$$

Des deux questions précédentes, on tire

$$n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n\ln n + \ln n - n + 1$$

soit encore

$$1 + \frac{-n+1}{n\ln n} \leq \frac{\ln(n!)}{n\ln n} \leq 1 + \frac{\ln n - n + 1}{n\ln n}.$$

Par le théorème d'encadrement des limites, $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln(n)}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Ceci signifie bien que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9
(3578)
Soit > 0 et $A \geq 0$ tel que $|f(x) - a| <$. Pour $x > A$, on coupe l'intégrale en A.

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^A f(t)dt + \frac{1}{x}\int_A^x f(t)dt.$$

On peut trouver x_0 assez grand tel que, pour tout $x > x_0$, on a

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^A f(t)dt\right| < .$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{x}\int_A^x (a-)dt \leq \frac{1}{x}\int_A^x f(t)dt \leq \frac{1}{x}\int_A^x (a+)dt$$

ce qui implique

$$\frac{(a-)(x-A)}{x} \leq \frac{1}{x}\int_A^x f(t)dt \leq \frac{(x-A)(a+)}{x}.$$

Il est alors possible de trouver x_1 tel que, pour tout $x > x_1$, on a

$$a - 2 \leq \frac{(a-)(x-A)}{x} \text{ et } \frac{(x-A)(a+)}{x} \leq a + 2.$$

Pour $x > \max(x_0, x_1)$, on a donc

$$-3 \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - a \leq 3,$$

ce qui prouve le résultat voulu.

Exercice 10
(234)
(a) Par le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

(b) Via le changement de variable $t = \sin x$ (avec

$$x \in [0; \pi/2]$$

)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 11

(246)

(a) φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ existe.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\text{sh}t}{t}\text{d}t \underset{u=-t}{=} -\int_{x}^{2x} \frac{\text{sh}u}{u}\text{d}u = -f(x)$$

Ainsi f est impaire. (b) φ est continue donc possède une primitive F. Comme

$$f(x) = F(2x) - F(x)$$

f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{\text{sh}2x - \text{sh}x}{x}$$

pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f'(0) = 1$. (c) Pour tout $x \geq 0$, on a $\text{sh}2x \geq \text{sh}x$ donc $f'(x) \geq 0$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque

$$f(x) \geq \int_{x}^{2x} \frac{\text{sh}x}{t}\text{d}t = \text{sh}x\ln 2$$

on a $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. On complète le tableau de variation par parité.

Exercice 12

(248)

(a) En développant

$$f(x) = \int_0^x (\sin x\cos t - \cos x\sin t)\, g(t)\,\text{d}t = \sin x\int_0^x \cos t g(t)\,\text{d}t - \cos x\int_0^x \sin t g(t)\,\text{d}t$$

f est donc dérivable et

$$f'(x) = \cos x\int_0^x \cos t g(t)\,\text{d}t + \sin x\int_0^x \sin t g(t)\,\text{d}t = \int_0^x \cos(t-x)\, g(t)\,\text{d}t$$

(b) f' est dérivable et

$$f''(x) = -\sin x\int_0^x \cos t g(t)\,\text{d}t + \cos x\int_0^x \sin t g(t)\,\text{d}t + g(x) = -\int_0^x \sin(x-t)\, g(t)\,\text{d}t + g(x)$$

donc

$$f''(x) + f(x) = g(x).$$

(c) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Solution homogène

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x.$$

Solution particulière $y(x) = f(x)$. Solution générale

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x \sin(x-t)\, g(t)\,\text{d}t$$

Exercice 13

(249)

(a) Soit f une primitive de f.

$$F(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \frac{f(x) - f(0)}{2x} + \frac{f(0) - f(-x)}{2x} \underset{x\to 0}{\langle 10230\rangle} f'(0) = f(0)$$

On prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0) = f(0)$. (b) F est dérivable par opérations et

$$F'(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2x} - \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

et on peut donc simplifier

$$F'(x) = \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

(c) Sachant

$$\int_{-x}^{x} tf'(0)\,\mathrm{d}t = 0$$

on peut écrire

$$F'(x) = \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} t\left(f'(t) - f'(0)\right)\mathrm{d}t$$

En posant

$$M_x = \sup_{t\in[-x;x]}\left|f'(t) - f'(0)\right|$$

on a alors

$$\left|F'(x)\right| \leq \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} tM_x\mathrm{d}t = \frac{1}{2}M_x$$

Or f' est continue en 0, donc $M_x \underset{x\to 0}{\langle 10230\rangle} 0$ puis

$$F'(x) \underset{x\to 0}{\langle 10230\rangle} 0$$

En vertu du théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut affirmer que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Exercice 14
(250)

(a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ est définie et continue sur

$$]0;+\infty[,$$

elle y admet donc une primitive F. Pour $x > 0$, on a

$$[x;2x] \subset]0;+\infty[,$$

donc l'intégrale définissant $f(x)$ existe et

$$f(x) = F(2x) - F(x)$$

Puisque la fonction F est dérivable, la fonction f l'est aussi et

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)}{x}$$

L'étude pour $x < 0$ est similaire en considérant $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ définie et continue sur

$$]-\infty;0[\supset [2x;x].$$

(b) Pour $x > 0$,

$$\forall t \in [x; 2x], \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^t \leq \mathrm{e}^{2x}$$

donc

$$\mathrm{e}^x \ln 2 \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{2x} \ln 2$$

puis

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\langle 10230 \rangle} \ln 2$$

L'étude est analogue en 0^-

Exercice 15

(251)

(a) La fonction f est définie sur

$$]0;1[\cup]1;+\infty[$$

car pour chaque x dans ce domaine, la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ est définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 car 1 n'y appartient pas. Pour

$$x \in]0;1[,$$

on a pour tout

$$t \in [x^2; x],$$

$2\ln x \leq \ln t \leq \ln x$ puis par encadrement d'intégrales

$$\frac{x^2 - x}{2\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

et donc

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\langle 10230 \rangle} 0.$$

L'encadrement est identique pour $x > 1$ ce qui permet d'affirmer

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\langle 10230 \rangle} + \infty$$

et

$$f(x)/x \underset{x \to +\infty}{\langle 10230 \rangle} + \infty.$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t\ln t} \mathrm{d}t$$

et par encadrement du t du numérateur par x et x^2 , on obtient $f(x)$ encadré par $xI(x)$ et $x^2 I(x)$ avec

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln 2$$

d'où

$$f(x) \underset{x \to 1}{\langle 10230 \rangle} \ln 2.$$

(b) On introduit H primitive de $t \mapsto 1/\ln t$ et on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$$]0;1[\cup]1;+\infty[$$

avec

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\ln x}.$$

Cette dérivée étant de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, on conclut que f est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur

$$]0;1[\cup]1;+\infty[.$$

On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ et puisque

$$f^{'}(x) \underset{x\to 1}{\langle 10230\rangle} 1,$$

la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{1}$ sur

$$]0;+\infty[$$

avec $f^{'}(1) = 1$. Par développement en série entière $h \mapsto \dfrac{\ln(1+h)}{h}$ est $\mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage de 0 donc $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-1}$ est $\mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage de 1 et par passage à l'inverse $x \mapsto f^{'}(x)$ est $\mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage de 1. Finalement f est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur

$$]0;+\infty[.$$

Le calcul de $f^{''}(x)$ permet de justifier que $f^{''}$ n'a pas de limite finie en 0 et donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage de 0. (c) f est croissante, convexe, branche parabolique verticale en $+\infty$, tangente horizontale en l'origine.

Exercice 16
(252)
Posons

$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

On a

$$F(x) = \int_{0}^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}} - \int_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

ce qui assure que F est définie et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$. Le changement de variable $t = -u$ assure que F est impaire. Par dérivation de primitive

$$F^{'}(x) = \frac{2}{\sqrt{1+(2x)^2+(2x)^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$$

En réduisant au même dénominateur et en multipliant par la quantité conjuguée, $F^{'}(x)$ est du signe de

$$4(1+x^2+x^4) - \left(1+(2x)^2+(2x)^4\right) = 3(1-4x^4)$$

F est donc croissante que

$$[0;1/\sqrt{2}]$$

puis décroissante sur $[1/\sqrt{2};+\infty[$

En 0, le graphe de la fonction passe par l'origine avec une tangente d'équation $y = x$. Quand $x \to +\infty$,

$$0 \le F(x) \le \int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} \to 0$$

et donc F tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 17
(253)
(a) Par le changement de variable $u = -t$, on obtient que f est paire. (b) Pour tout $x > 0$, on a

$$\forall t \in [x; 2x], \frac{\mathrm{ch} x}{t} \leq \frac{\mathrm{ch} t}{t} \leq \frac{\mathrm{ch} 2x}{t}$$

En intégrant, on obtient

$$\mathrm{ch} x . \ln 2 \leq f(x) \leq \mathrm{ch} 2x . \ln 2$$

et on en déduit

$$f(x) \underset{x \to 0}{\langle 10230 \rangle} \ln 2$$

(c) La fonction $t \mapsto \mathrm{ch} t / t$ est continue sur

$$]0; +\infty[$$

donc y admet une primitive G et puisque

$$f(x) = G(2x) - G(x),$$

on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$$]0; +\infty[$$

et

$$f'(x) = \frac{\mathrm{ch} 2x - \mathrm{ch} x}{x}$$

De plus

$$f'(x) \underset{x \to 0}{\langle 10230 \rangle} 0$$

donc, par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. (d) Puisque

$$f(x) \geq \mathrm{ch} x . \ln 2,$$

f présente une branche parabolique verticale.

Exercice 18
(254)
(a) Soit

$$x \in]0; 1[,$$

$$[x; x^2] \subset]0; 1[$$

et $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur

$$]0; 1[$$

donc

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

existe. Pour

$$t \in [x^2; x],$$

$$\frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x^2}$$

donc
$$\frac{x^2-x}{\ln x^2} \leq \varphi(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln x}$$
Quand $x \to 0^+$,
$\varphi(x) \to 0$. On a aussi
$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{t\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
donc
$$\int_x^{x^2} \frac{x^2\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \varphi(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
or
$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln 2$$
Quand $x \to 1^-$,
$\varphi(x) \to \ln 2$. Finalement φ peut être prolongée par continuité en 0 et en 1. (b) Soit F une primitive de $\frac{1}{\ln t}$ sur
$$]0;1[.$$
On a
$$\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$$
ce qui permet de dériver φ et d'obtenir
$$\varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$
L'intégrale
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$$
est définie car on vérifie aisément que la fonction intégrée peut être prolongée par continuité en 0 et en 1 et on a
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x = [\varphi(x)]_0^1 = \ln 2$$

Exercice 19
(257)
(a)
$$f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{t}{\sqrt{(t-1)(t^2+t+1)}}$$
est définie et continue sur
$$]1;x]$$
et
$$f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{t-1}}$$
donc $F(x)$ existe. F est primitive de la fonction continue f sur
$$]1;+\infty[$$
donc F est $\mathcal{C}^1$ et
$$F'(x) = f(x).$$

Comme f est $\mathcal{C}^{\infty}$, F est finalement $\mathcal{C}^{\infty}$ et sur

$$]1;+\infty[$$

$$F^{'}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}$$

(b) F est continue en 1 et

$$F^{'}(x)\underset{x\to 1}{\langle 10230\rangle} + \infty.$$

Tangente verticale en 1. (c) $\sqrt{t^3-1} \leq t^{3/2}$ donc

$$F(x) \geq \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2\underset{x\to+\infty}{\langle 10230\rangle} + \infty$$

donc

$$F(x)\underset{+\infty}{\langle 10230\rangle} + \infty.$$

(d) F est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ donc F réalise une bijective de $[1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$. F réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ de

$$]1;+\infty[$$

sur

$$]0;+\infty[$$

avec $F^{'}(x) \neq 0$ donc F^{-1} est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur

$$]0;+\infty[.$$

$$\left(F^{-1}\right)^{'} = \frac{1}{F^{'}\circ F^{-1}} = \frac{\sqrt{\left(F^{-1}\right)^3-1}}{F^{-1}}$$

donc F^{-1} est solution de l'équation différentielle considérée. (e) F^{-1} est continue en 0 et $F^{-1}(0) = 1$. En vertu de la relation

$$\left(F^{-1}\right)^{'} = \frac{\sqrt{\left(F^{-1}\right)^3-1}}{F^{-1}}$$

on obtient

$$\left(F^{-1}\right)^{'}(x)\underset{x\to 0}{\langle 10230\rangle} 0$$

F^{-1} est donc dérivable en 0 et

$$\left(F^{-1}\right)^{'}(0) = 0.$$