

TD séries

Exercice 1

(1813)

Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

$$u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$$

Exercice 2

(1834)

Calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \arctan \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$$

Exercice 3

(1843)

Nature puis somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 4

(1850)

Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right)$$

Exercice 5

(1859)

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$

Exercice 6

(1883)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

1. Déterminer un équivalent de

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

En déduire que $u_n \rightarrow 0$.

2. En s'inspirant de ce qui précède, établir que $\sqrt{n}u_n \rightarrow C > 0$ (on ne cherchera pas expliciter la valeur de C).

Exercice 7

(1885)

Montrer que

$$u_n = \frac{n!^n}{n^{n+1/2}}$$

a une limite non nulle.

Exercice 8

(1910)

En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir : [3]

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

$$\ln(n!) \sim n \ln n$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$$

Exercice 9

(1931)

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants : [3]

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$u_n = \frac{1}{n \cos^2 n}$$

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Exercice 10

(1953)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.

Montrer que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est aussi convergente