Corrigé
TD séries

Exercice 1
(1813)

(a) $|u_n| \sim 1/n^2$ donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente. (b) On applique le critère spécial et on conclut que $\sum u_n$ converge. (c)

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et on peut conclure que $\sum u_n$ converge. (d)

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}.3\pi}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 2
(1834)

Considérons

$$v_n = \arctan\frac{1}{n+1} - \arctan\frac{1}{n+2} \in]0;\pi/2[$$

On constate
$\tan v_n = \dfrac{1}{n^2+3n+3}$ et donc $u_n = v_n$. En tant que somme télescopique associée à une suite convergente, la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 3
(1843)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$$

donc la série converge Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

puis après télescopage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Exercice 4

(1850)

$$\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{4n}-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série étudiée est absolument convergente. On a

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=\sum_{k=1}^{4N+4}\frac{1}{k}-4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2}$$

Or

$$4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2}=2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1}=2\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k}$$

Par le développement

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$

on parvient à

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=\ln\,(4N+4)+\gamma-2\ln\,(2N+1)-2\gamma+\ln N+\gamma+\mathrm{o}(1)\to 0$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=0$$

(ce qui change du $\ln 2$ traditionnel… ;-)

Exercice 5

(1859)

Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{4n+1}=\sum_{n=0}^{N}\int_0^1(-t^4)^n\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1-(-t^4)^{N+1}}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_0^1\frac{(-t^4)^{N+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1 t^{4N+4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4N+5}\to 0$$

donc $\sum\frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

Enfin

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right)$$

Exercice 6
(1883)
(a) On a

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\frac{2n+1}{2n+2} = \ln\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

La série $\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n$ tend vers $-\infty$ donc $\ln u_n \to -\infty$ puis $u_n \to 0$. (b) Posons $v_n = \sqrt{n}u_n$.

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln u_{n+1} - \ln u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \ln v_{n+1} - \ln v_n$ converge et donc la suite $\ln v_n$ aussi. En posant $\updownarrow$ sa limite, on obtient $\sqrt{n}u_n \to C$ avec $C = \mathrm{e}^{\updownarrow} > 0$. Notons qu'évidemment, on aurait aussi pu résoudre cet exercice à l'aide de la formule de Stirling.

Exercice 7
(1885)
Après calculs

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \mathrm{O}\left(1/n^2\right)$$

donc la suite $(\ln u_n)$ converge et on peut conclure. On peut aussi faire le lien avec la formule de Stirling...

Exercice 8
(1910)
(a) Par croissance de la fonction $\sqrt{.}$

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\mathrm{d}t \le \sqrt{k} \le \int_{k}^{k+1} \sqrt{t}\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_0^n \sqrt{t}\mathrm{d}t \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \int_1^{n+1}\sqrt{t}\mathrm{d}t$$

et on conclut aisément. (b) On a

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

et, par croissance de la fonction ln, ,

$$\int_{k-1}^{k} \ln t\mathrm{d}t \le \ln k \le \int_{k}^{k+1} \ln t\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_1^n \ln t\mathrm{d}t \le \ln n! \le \int_1^{n+1} \ln t\mathrm{d}t$$

puis on peut conclure. (c) Par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x\ln x$ sur $[1/\mathrm{e};+\infty[$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \frac{1}{k\ln k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

donc

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \leq \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

puis on conclut via

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln\,(\ln t) + C^{te} \to +\infty$$

Exercice 9

(1931)

(a)

$$u_n = \exp\left(-n^2\ln\left(1+1/n\right)\right) = \exp\left(-n+\mathrm{o}(n)\right)$$

donc

$$n^2 u_n \langle 10230 \rangle_{n\to+\infty} 0$$

et la série est absolument convergente. (b) $u_n \geq 1/n$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est divergente. (c)

$$n^2 u_n = \frac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}} = \mathrm{e}^{2\ln\,(n) - \ln\,(n)\ln\,(\ln n)} \langle 10230 \rangle_{n\to+\infty} 0$$

donc la série est absolument convergente

Exercice 10

(1953)

Puisque $2ab \leq a^2 + b^2$ on a

$$\sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}\left(u_n + u_{n+1}\right)$$

or $\sum u_n$ et $\sum u_{n+1}$ convergent donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.