Mathématiques : devoir surveillé n°5

17 janvier 2025. Durée 3 heures. Pas de calculatrice.

Instructions de présentation

- Sur la première page : indiquer dans l'ordre de l'énoncé la page de début de chaque exercice.
- Commencer chaque exercice en haut d'une nouvelle page.
- Encadrer les résultats.

Tout résultat non justifié sera ignoré. Vérifiez vos calculs et vos raisonnements.

Exercice 1 : arithmétique

Questions indépendantes

Q1 Déterminer $(2^6 - 1) \wedge (2^8 - 1)$.

Q2 Donner la décomposition en facteurs premiers de $6!$

Exercice 2 : nombres réels

Questions indépendantes

Q1 Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
La partie A de $\mathbb{R}$ est-elle majorée, minorée ?
A-t-elle une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum ?
Les donner, le cas échéant. Justifier rigoureusement vos résultats.

Q2 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$0 < \lfloor \sqrt{x^2 - 4} \rfloor \leqslant 3$$

Q3 Montrer que $x = 0,20252025\underline{2025}\ldots$ est rationnel et le donner sous forme de fraction.

Exercice 3 : Suites récurrentes d'ordre 2

Questions indépendantes

Dans chaque cas, déterminer le terme général u_n en fonction de n et dire si la suite u converge, et si oui donner sa limite.

Q1 $u_0 = 3, u_1 = -4, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$.

Q2 $u_0 = 1, u_1 = 2, \forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$.

Q3 $u_0 = 3, u_1 = -4, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 4u_{n+1} + 5u_n = 0$
(on pourra considérer $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$).

Exercice 4 : DL et suites.

Q1 Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1 + x)$.

Q2 En déduire un $DL_1(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Q3 Calculer un $DL_1(0)$ de $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

Q4 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$.
Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Problème.

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$$

Q1 Étudier les variations de f, ses limites aux bornes du domaine de définition, et synthétiser cela dans un tableau de variations.

Q2 Préciser les branches infinies du graphe de f (direction asymptotique, asymptote, position par rapport à l'asymptote).

Q3 Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f''(0)$.

Q4 Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 0, et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente en 0.

Q5 Tracer l'allure de la courbe de f (unité 4cm).

Q6 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Q7 Calculer le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

Partie B : étude de deux suites

Dans la suite, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit la fonction f_n par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$$

Q8 Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

Q9 Étudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$ et ses limites aux bornes de cet intervalle.

Q10 En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n tels que $u_n < 1 < v_n$.

Q11 Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

Q12 Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.

Q13 En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

Q14 Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite (u_n).

Q15 Montrer que (u_n) converge.

On note l la limite de (u_n). Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on définit

$$g_n(x) = \ln 3 + n \ln x - x^2$$

Q16 Soit $t \in]0, +\infty[$, montrer que $g_n(t) = 0$ si, et seulement si, $f_n(t) = 0$.

Q17 Avec ce qui précède, montrer par l'absurde que $l = 1$.

Soit la suite (w_n) définie par $\forall n \geqslant 2, w_n = u_n - 1$.

Q18 En utilisant un développpement limité de $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n)$, donner un équivalent simple de w_n.