DS 5 corrigé.

Exercice 1.

Q-2) $2^6-1 \wedge 2^8-1 = 2^{6\wedge 8}-1 = 2^2-1 = \boxed{3}$ (propriété en exercice)

ou bien avec l'algo d'Euclide :

$2^6-1=63 \quad 2^8-1=255 \qquad 255=4\times 63+3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 63=21\times 3+0$ donc $\boxed{255 \wedge 63 = 3}$

Q-1) $6! = 2\times 3\times 4\times 5\times 6$

$= 2\times 3\times 2^2\times 5\times 2\times 3 = \boxed{2^4\times 3^2\times 5}$

Exercice 2 :

Q1) posons $u_n = \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2}$ on a $u_n \to 0$

n pair $0 \leq u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ $\quad$ n impair $0 \leq u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

d'où (u_{2n+2}) décroît vers 0, on a $0 \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+1}$,

donc $\boxed{\inf(A)=0, \ \sup(A)=u_1=2=\max(A)}$ car $2\in A$

mais $\boxed{A \text{ n'a pas de min}}$ car $0 \notin A$

On a $\inf(A)=0$ car 0 est un minorant de A

et u_{2n+2} décroît vers 0 (théorème de la limite monotone).

Q2) on a $0 < \lfloor\sqrt{x^2-4}\rfloor \leq 3 \iff 1 \leq \lfloor\sqrt{x^2-4}\rfloor \leq 3$

$\iff 1 \leq \sqrt{x^2-4} < 4 \iff 1 \leq x^2-4 < 16$

$\iff 5 \leq x^2 < 20 \iff \begin{cases} \sqrt{5} \leq x < 2\sqrt{5} \\ \text{ou} \\ -2\sqrt{5} < x \leq -\sqrt{5} \end{cases}$

d'où $\boxed{\text{l'ensemble des solutions : }]-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, 2\sqrt{5}[}$

Q3) $x = 0,2017\underline{2017}\ldots$ donc $10^4 x = 2017,2017\underline{2017}\ldots$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 2017 + x$

ainsi $\boxed{x = \frac{2017}{10^4-1} = \frac{2017}{9999} \in \mathbb{Q}}$ (fraction irréductible car 2017 est premier)

Exercice 3 :

Q1 équation caractéristique : $r^2 + r - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$ donc $r = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3$ ou 2

d'où $u_n = \lambda(-3)^n + \mu(2^n)$, on a $u_0 = 3 = \lambda + \mu$

et $u_1 = -4 = -3\lambda + 2\mu$

d'où $\lambda = 2, \mu = 1$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2(-3)^n + 2^n}$

on a $u_{2n} \to +\infty$, $2^n = o(3^n) \Rightarrow u_{2n+1} \to -\infty$ $\boxed{(u_n) \text{ diverge}}$

Q2 équ. car. $4r^2 - 4r + 1 = 0 = (2r-1)^2$ d'où racine double $\frac{1}{2}$

donc $u_n = (\lambda n + \mu)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_0 = 1 = \mu$

$u_1 = 2 = (\lambda + \mu)\frac{1}{2}$

donc $\lambda = 3, \mu = 1$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (3n+1)\frac{1}{2^n}}$

et donc, par croissance comparée : $n = o(2^n)$

$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$

Q3 éq. car. $r^2 - 4r + 5 = 0$, $\Delta = 16 - 4 \times 5 = -4 = (2i)^2$

d'où $r = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(2+i)^n + \mu(2-i)^n$

on a $2 + i = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}}\right)$ car $|2+i| = \sqrt{5}$

en posant $\theta \in [0, \pi]$ tq $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, on a $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$: $2+i = \sqrt{5}e^{i\theta}$

donc $u_n = \lambda(\sqrt{5}e^{i\theta})^n + \mu(\sqrt{5}e^{-i\theta})^n = \sqrt{5}^n(\lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta})$

$= \sqrt{5}^n\left((\lambda + \mu)\cos(n\theta) + (\lambda - \mu)i\sin(n\theta)\right)$

donc $u_0 = 3 = \lambda + \mu$

et $u_1 = -4 = \sqrt{5}\left((\lambda+\mu)\cos\theta + (\lambda - \mu)\sin\theta\right)$

$= 2(\lambda + \mu) + i(\lambda - \mu)$

$= (2+i)\lambda + (2-i)\mu$

donc $\lambda = \frac{3}{2} + 5i$

$\mu = \frac{3}{2} - 5i$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{5}^n\left(3\cos(n\theta) - 10\sin(n\theta)\right)}$

limite de u_n ?

---

on a $3\cos(n\theta) - 10\sin(n\theta) = \underbrace{\sqrt{109}}_{3^2+10^2}\left(\frac{3}{\sqrt{109}}\cos(n\theta) - \frac{10}{\sqrt{109}}\sin(n\theta)\right)$

soit $\varphi \in [0, \pi]$ tq $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{109}}$ et $\sin\varphi = \frac{10}{\sqrt{109}}$

on a $\underline{u_n = \sqrt{5}^n\sqrt{109}\cos(n\theta + \varphi)}$

on a $0 < \sin\theta < \frac{1}{2}$ donc $\theta \in]0, \pi/6[$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$

donc il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tq $\cos(n\theta + \varphi) \in]0, \pi/6[$

et donc une sous-suite de (u_n) vérifiant $u_{\varphi(n)} > \sqrt{5}^n \frac{\sqrt{109}}{2}$

de même, on a une infinité de $n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$\cos(n\theta - \varphi) \in]-\pi, -\pi + \frac{\pi}{6}[$, donc une sous-suite de (u_n)

vérifiant $(u_{\varphi(n)} < -\sqrt{5}^n \frac{\sqrt{109}}{2}$: ayant deux suites

extraites divergentes, $\boxed{(u_n) \text{ est donc divergente}}$,

et comme les limites de ces 2 suites sont $+\infty$ et $-\infty$

$\boxed{(u_n) \text{ n'a pas de limite}}$

Exercice 4

Q1 $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$

Q2 $\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)}$

Q3 $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} = e \times e^{-\frac{x}{2} + o(x)} = e\, e^{y}$ avec $y = \frac{-x}{2} + o(x) \to 0$

$= e(1 + y + o(y))$

$= \boxed{e - \frac{e}{2}x + o(x)}$

Q4 on a $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e = (1+x)^{\frac{1}{x}} - e$ avec $x = \frac{1}{n}$ et $x \to 0$

donc $u_n = -\frac{e}{2}x + o(x) = -\frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

ainsi $\boxed{u_n \sim \frac{-e}{2n}}$

Problème — Partie A

Q1 f dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3e^{-x^2} + 3x(-x^2)'e^{-x^2} = 3e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$= 0 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

donc $f'(x) > 0 \iff x \in]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$

$x \to +\infty$: $xe^{-x^2} \to 0$ par croissance comparée car $x^2 \to +\infty$
$x \to -\infty$:

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	-1

$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

on a $f(0) = -1$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2e}} - 1$

$> 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{2e}} > 1$

$\Leftrightarrow 9 > 2e$

ok car $e < 3$

donc $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$

Q2 | on a 2 branches, en $\pm\infty$, avec une asymptote commune d'équation $y = -1$. Comme f décroît en $+\infty$, la courbe est au-dessus de son asymptote. En $-\infty$, f décroît donc la courbe est au-dessous de son asymptote.

Q3 f $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ($\exp$, $x \mapsto x^2$, ...)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3e^{-x^2}(1-2x^2)$ (voir Q32], donc

$$f''(x) = 3\left(-2x e^{-x^2}(1-2x^2) - 4x e^{-x^2}\right) = 3x e^{-x^2}(-2+4x^2-4)$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) = 6x e^{-x^2}(2x^2-3)} \text{ et } \boxed{f''(0) = 0}$$

Q4 | on fait un $DL_2(0)$ de f : $f(x) = 3x e^{-x^2} - 1$ $\quad x^2 \to 0$

$$= 3x\left(1 - x^2 + o(x^2)\right) - 1$$

$$= -1 + 3x - 3x^3 + o(x^3)$$

d'où une tangente d'équation $y = -1 + 3x$ en 0

et si $x > 0$: $-3x^3 + o(x^3) < 0$ au voisinage de 0

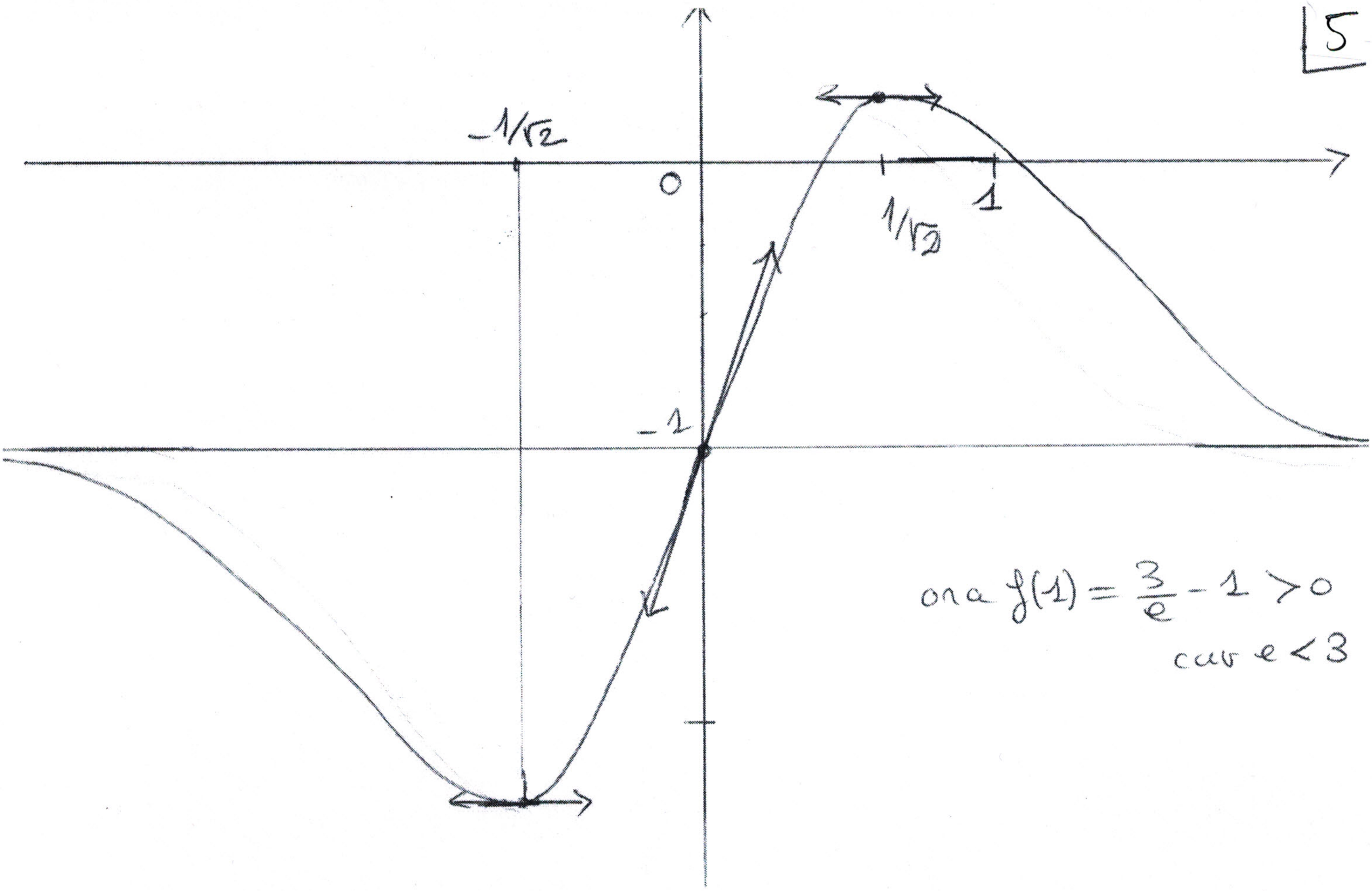
si $x < 0$: " > 0

donc $\boxed{\text{la courbe est au-dessus de sa tangente à gauche de } 0 \text{ et au-dessous à droite de } 0}$

Q5 |

on remarque que $x \mapsto f(x) + 1$ est impaire !

$\Rightarrow$ symétrie de la courbe par rapport au point de coordonnées $(0, -1)$



on a $f(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$
car $e < 3$

Q6 car f $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f admet un $DL_n(a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.

Q7 $f(x) = 3x e^{-x^2} - 1$ donc DL_5 de $x e^{-x^2}$, donc DL_4 de e^{-x^2}

soit $y = -x^2$ $\left(\begin{matrix} y \to 0 \\ x \to 0 \end{matrix}\right.$ donc $DL_{4/2} = DL_2$ de e^y : $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

$\Rightarrow e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$,

d'où $\boxed{f(x) = -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)}$

Partie B

Q8 $\underline{f_n(0) = -1 < 0}$ $(n \geq 2)$ $f_n(1) = 3e^{-1} - 1 = \frac{3}{e} - 1$

or $e < 3$ donc $\frac{3}{e} > 1$, donc $\underline{f_n(1) > 0}$

Q9 f_n est $\mathcal{C}^\infty$ clairement (composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$)
sur $\mathbb{R}$

on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} + 3x^n(-2x)e^{-x^2}$

$= 3x^{n-1}e^{-x^2}(n - 2x^2)$

$n \geq 2$, donc $f_n'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}$ or $x > 0$

donc $f_n'(x) > 0 \iff x < \sqrt{\frac{n}{2}}$

$x \to +\infty$: par croissance comparée, $3x^n e^{-x^2} \to 0$

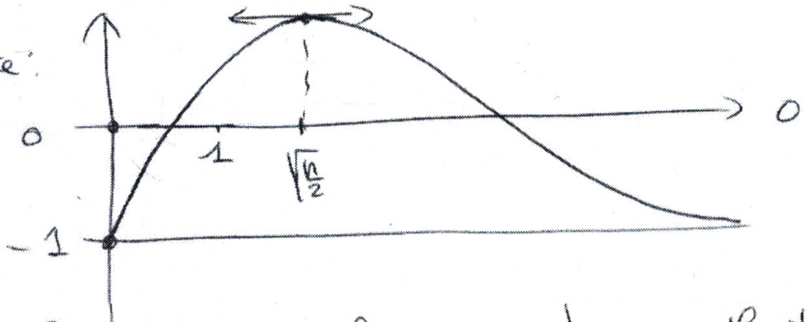
donc $f_n(x) \to -1$

d'où le tableau :

x	0	1	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$		0	$-$
$f_n(x)$	-1 ↗	$+$	↗ ↘	-1

$n \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$

d'où l'allure :



Q10) f_n continue sur $\mathbb{R}$, $f_n(0) \leq 0$ et $f_n(1) \geq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u_n \in [0,1]$ tq $f_n(u_n) = 0$

On a $f_n(0) \neq 0$ et $f_n(1) \neq 0$ donc $0 < u_n < 1$

De même, $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1$ donc $\exists b > 1$ tq $f_n(b) < 0$

avec le même théorème, on déduit $\exists v_n \in [1, b]$, $f_n(v_n) = 0$

On a $1 < v_n$ car $f_n(1) \neq 0$

Comme f_n est strictement monotone sur $[0,1]$, u_n est unique. Sur $[1, \sqrt{\frac{n}{2}}]$, f_n est non nulle, ensuite f_n strictement monotone, donc $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}}$ et v_n unique.

Q11) D'après ce qui précède, $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}}$, donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty}$

Q12) on a $f_n(u_n) = 0 = 3u_n^n e^{-u_n^2} - 1$

donc $\boxed{e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}}$

Q13 on a $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = u_n\left(3u_n^n e^{-u_n^2}\right) - 1$

$$= u_n\left(f_n(u_n) + 1\right) - 1$$

donc $f_{n+1}(u_n) = u_n - 1$ or $u_n < 1$ (Q11)

donc $\boxed{f_{n+1}(u_n) < 0}$

Q14 f_{n+1} est croissante sur $[0,1]$ et $0 < u_n < 1$, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(u_n) < 0$, donc $u_n < u_{n+1}$ $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$

Q15 (u_n) est majorée par 1, croissante, donc converge.

Q16 on a $g_n(t) = 0 \iff e^{g_n(t)} = 1 \iff e^{\ln 3 + n\ln t - t^2} = 1$

$\iff 3\underbrace{x^n}_{=e^{n\ln t}} e^{-t^2} = 1 \iff f_n(t) = 0$

Q17 supposons $\ell \neq 1$: on a $\forall n \geq 2, f_n(u_n) = 0 \iff g_n(u_n) = 0$ car $u_n > 0$

donc $\ln 3 + n\ln u_n - u_n^2 = 0$, donc $n = \dfrac{u_n^2 - \ln 3}{\ln u_n}$, $\ln u_n \neq 0$ car $u_n < 1$

en passant à la limite ; comme $u_n \to \ell$, on a

$$\frac{u_n^2 - \ln 3}{\ln u_n} \longrightarrow \frac{\ell^2 - \ln 3}{\ln \ell} \in \mathbb{R}$$

mais $n \to +\infty$: contradiction !

Ainsi $\boxed{\ell = 1}$

Q18 on a $g_n(u_n) = 0 = \ln 3 + n\ln u_n - u_n^2$

$\Rightarrow 0 = \ln 3 + n\ln(1+w_n) - (1+w_n)^2$

donc $\ln(1+w_n) = \dfrac{(1+w_n)^2 - \ln 3}{n}$

or $w_n \to 0$, donc $\ln(1+w_n) \sim w_n$

et $(1+w_n)^2 - \ln 3 \sim 1 - \ln 3$

donc $\boxed{w_n \sim \dfrac{1-\ln 3}{n}}$