Mathématiques : devoir surveillé n°6

7 février 2025. Durée 3 heures. Pas de calculatrice.

Instructions de présentation : comme d'habitude

Tout résultat non justifié, non encadré ou souligné sera ignoré. Vérifiez vos calculs et vos raisonnements.

Exercice 1 : prolongement

Soit $g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ pour $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$

Q1 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de g.

Q2 Montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0.

Q3 Montrer que ce prolongement, que l'on appelera encore g, est dérivable en 0.

Q4 Donner l'équation de la tangente à la courbe C_g de g en 0 et la position de C_g par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 2 : équivalent.

Q1 Donner un équivalent de $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e + \dfrac{e}{2n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : branches infinies.

Pour x un réel, on définit $g(x) = \sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt[3]{x^3+2x+1}$

Etudier les branches infinies de la courbe C_g de g (s'il y a une asymptote, on précisera la position de la courbe).

On rappelle que la fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$ par :
si $x < 0$, $\sqrt[3]{x} = -|x|^{\frac{1}{3}}$
si $x > 0$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
et $\sqrt[3]{0} = 0$.

Exercice 4 : dérivées

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = f(x)$$

Q1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\lambda^n x) = f(x)$.

Q2 Montrer que si $|\lambda| < 1$ alors f est constante.

Q3 Montrer que si $|\lambda| > 1$ alors f est constante.

Exercice 5 : dérivées n-ièmes

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 2x + 3)e^{2x}$

Q1 Déterminer $g^{(n)}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

Exercice 6 : accroissements finis

Q1 À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tous a et $b \in \mathbb{R}$, tels que $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$\tan a < \frac{\ln(\cos a) - \ln(\cos b)}{b-a} < \tan b$$

Problème

Partie I : étude d'une fonction

Soit f définie sur $D = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

Q1 Donner le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.

Q2 Montrer que f est continue sur D.

Q3 Montrer que f est dérivable en 0.

Q4 Etudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f. On montrera en particulier que f s'annule en un unique point β de D.

Q5 Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Partie II : étude d'une suite

Soit $g : \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \ln(1+2x)$, et u la suite telle que $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n) = g(u_n)$$

Q6 Vérifier que u_n est bien défini pour tout n dans $\mathbb{N}$ (on cherchera un intervalle I stable par g).

Q7 On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge . Déterminer ses limites L possibles (justifier avec soin).

On suppose que $u_0 \in]0, \beta]$.

Q8 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \beta]$

Q9 Montrer que la suite u est croissante et qu'elle converge vers β .

Q10 Montrer que u converge aussi vers β si on suppose que $u_0 \in]\beta, +\infty[$

Q11 On pose $u_0 = 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Exercice bonus (à ne traiter que si tout ce qui précède a été traité) : théorème des cordes

Q1 Soit $\alpha = \dfrac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que pour toute application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que

$$f(x_0 + \alpha) = f(x_0)$$

Indication : on commencera par le cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Q2 Soit $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$.
En considérant l'application

$$f_\alpha : x \mapsto x - \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}}$$

vérifier que la propriété précédente est fausse : il n'existe pas $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0 + \alpha) = f(x_0)$.