DS6 corrigé.

Exercice 1

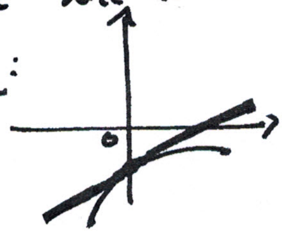
Q1 $\boxed{g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)}$

Q2 quand $x \to 0$, par Q1, $g(x) \to -\frac{1}{2}$ donc on pose $\boxed{g(0) = -\frac{1}{2}}$

Q3 on a par Q1 : $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{1}{12} - \frac{1}{24}x + o(x) \longrightarrow \frac{1}{12}$ si $x \to 0$

donc $\boxed{g \text{ dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = \frac{1}{12}}$

Q4 $\boxed{y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}x}$ et $g(x) - y = -\frac{1}{24}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{24}x^2$ donc <0 au voisinage de 0, donc la courbe est sous sa tangente en 0 :



Exercice 2

on pose $x = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

alors $u_n = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} - e + \frac{e}{2}x$ or un $DL_2(0)$ de $e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

est $e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}e x^2 + o(x^2)$ (attention à mettre e en facteur dans ce calcul de DL)

donc $u_n = \frac{11}{24}e x^2 + o(x^2)$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{11}{24}\frac{e}{n^2}}$

Exercice 3

Pour x tendant vers $\pm\infty$, on pose $x = \frac{1}{t}$ où t tend vers 0

On a : $g(x) = \widehat{g}(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} + 2} - \sqrt[3]{\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + 1} = \frac{1}{|t|}(1 + 3t + 2t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{t}(1 + 2t^2 + t^3)^{\frac{1}{3}}$

On a : $(1+u)^a = 1 + au + \frac{a(a-1)}{2}u^2 + o(u^2)$

donc $(1 + 3t + 2t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(3t + 2t^2) - \frac{1}{8}(9t^2) + o(t^2)$

$= 1 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$

et : $(1 + 2t^2 + t^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(2t^2) + o(t^2) = 1 + \frac{2}{3}t^2 + o(t^2)$

• au voisinage de $+\infty$ (ici $|t| = t$)

$g(x) = \widehat{g}(t) = \frac{1}{t}(\frac{3}{2}t - \frac{19}{24}t^2 + o(t^2)) = \frac{3}{2} - \frac{19}{24}t + o(t)$

donc $\boxed{g(x) = \frac{3}{2} - \frac{19}{24x} + o(\frac{1}{x})}$

$\boxed{\text{La droite d'équation } y = \frac{3}{2} \text{ est asymptote horizontale à la courbe et la courbe est en dessous}}$

car $g(x) - \frac{3}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{19}{24x}$

• au voisinage de $-\infty$ (ici $|t| = -t$)

$g(x) = \widehat{g}(t) = \frac{1}{t}(-2 - \frac{3}{2}t - \frac{13}{24}t^2 + o(t^2))$ donc $\boxed{g(x) = -2x - \frac{3}{2} - \frac{13}{24x} + o(\frac{1}{x})}$

$\boxed{\text{La droite d'équation } y = -2x - \frac{3}{2} \text{ est asymptote à la courbe et la courbe est en dessus}}$

car $g(x) - (-2x - \frac{3}{2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{13}{24x}$ où $\frac{1}{x} < 0$

Exercice 4

Q1)

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(\lambda^n x) = f(x)$

Pour $n = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(\lambda^n x) = f(x)$!

Supposons qu'à un rang n on ait : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(\lambda^n x) = f(x)$

alors $\forall x \in \mathbb{R}\ f(\lambda^{n+1} x) = f(\lambda.\lambda^n x) = f(\lambda^n x) = f(x)$ d'après l'hypothèse de récurrence

On a donc démontré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(\lambda^n x) = f(x)}$

Q2)

Soit λ tel que $|\lambda| < 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n x = 0$ donc , par continuité de f en 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\lambda^n x) = f(0)$

donc , par unicité de la limite , $f(x) = f(0)$ puisque $f(\lambda^n x) = f(x)$ pour tout n

Donc : $\boxed{\text{si } |\lambda| < 1 \text{ alors } f \text{ est constante}}$

Q3)

Soit λ tel que $|\lambda| > 1$. Posons $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$. On a : $|u| < 1$

et $\forall x \in \mathbb{R}\ f(\mu x) = f(\lambda.\mu x) = f(x)$

D'après la question précédente, on a f constante.

Donc $\boxed{\text{si } |\lambda| > 1 \text{ alors } f \text{ est constante}}$

Exercice 5

Q1)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 2x + 3)e^{2x}$

Soit $u : x \longmapsto x^2 - 2x + 3$ et $w : x \longmapsto e^{2x}$. u et w sont de classe $\mathcal{C}^\infty$

et on a : $\forall x \in \mathbb{R}\ w^{(p)}(x) = 2^p e^{2x}$ pour tout p

et $u^{(0)}(x) = x^2 - 2x + 3$, $u^{(1)}(x) = 2x - 2$, $u^{(2)}(x) = 2$ et $u^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geq 3$

D'après la formule de Leibniz , on a : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) w^{(n-k)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) w^{(n-k)}(x) \text{ pour } n \geq 2$$

$$g^{(n)}(x) = (x^2 - 2x + 3)2^n e^{2x} + n(2x - 2).2^{n-1} e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2}.2.2^{n-2} e^{2x} = \frac{1}{2}$$

Pour $n = 0$ ou $n = 1$ la dernière égalité reste vraie

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ g^{(n)}(x) = 2^n(x^2 - 2x + 3 + n(x-1) + \dfrac{n(n-1)}{4})e^{2x}$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ g^{(n)}(x) = 2^n(x^2 + (n-2)x + \dfrac{n^2 - 5n + 12}{4})e^{2x}}$

Exercice 6

Soit $g : \left(\begin{array}{l} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(\cos x) \end{array} \right.$. g est définie , dérivable sur $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

avec : $\forall x \in I\ g'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

D'après le théorème des accroissements finis sur $[a, b]$ (g est continue sur $[a, b]$

et dérivable sur $]a, b[$) on a : $\exists c \in]a, b[\ g(b) - g(a) = (b - a)g'(c)$

donc $\dfrac{\ln(\cos a) - \ln(\cos b)}{b - a} = -g'(c) = \tan c$

Comme tan est strictement croissante sur $]a, b[$ on a donc

$$\boxed{\forall 0 < a < b < \frac{\pi}{2}\ \tan a < \frac{\ln(\cos a) - \ln(\cos b)}{b - a} < \tan b}$$

Problème

Partie I

Q1) $\boxed{f(x) = 1 - 2x + o(x)}$

Q2) La fonction $u : x \longmapsto 1 + 2x$ est continue sur D et $u(D) \subset]0, +\infty[$
La fonction ln est continue sur $]0, +\infty[$ donc $\ln u$ est continue sur D
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $D\setminus\{0\}$
Donc f est continue sur $D\setminus\{0\}$
De plus , d'après le développement limité , $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0
Ainsi : $\boxed{f \text{ est continue sur } D}$.

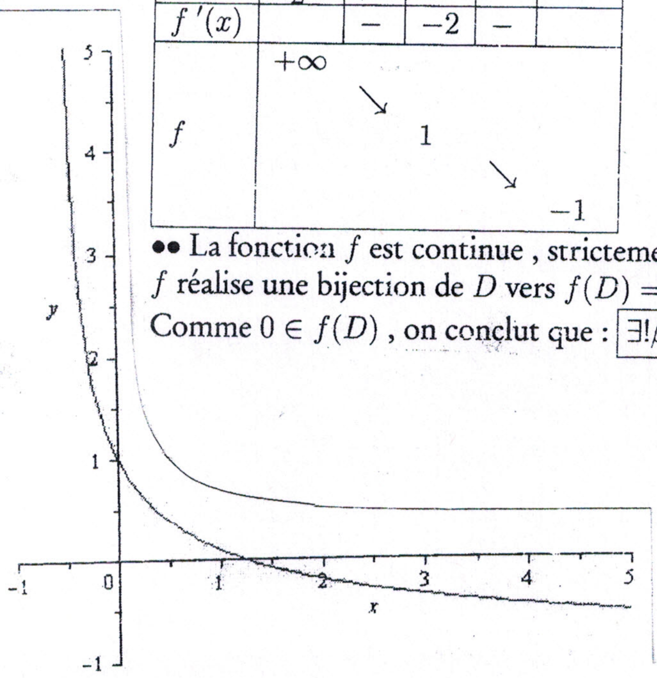
Q3) par Q1 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \underbrace{-2+o(1)}_{\to -2}$ donc $\boxed{f \text{ dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -2}$

Q4) • La fonction $u : x \longmapsto 1 + 2x$ est de classe C^∞ sur D et $u(D) \subset]0, +\infty[$
La fonction ln est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ donc $\ln u$ est de classe C^∞ sur D
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $D\setminus\{0\}$
Donc f est de classe C^∞ sur $D\setminus\{0\}$.
Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } D}$ d'après la question précédente
On a : $\forall x \in D\setminus\{0\}\ f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}\ln(1+2x) + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{2}{1+2x} = \boxed{\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2x}{2x+1} - \ln(1+2x)\right)}$
Posons $\varphi(x) = \dfrac{2x}{2x+1} - \ln(1+2x)$ pour $x \in D$
φ est dérivable sur D et on a : $\forall x \in D\ \varphi'(x) = \dfrac{2}{(2x+1)^2} - \dfrac{2}{2x+1} = \dfrac{-4x}{(2x+1)^2}$
φ est strictement croissante sur $\left]\dfrac{-1}{2}, 0\right]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
Donc φ est maximale en 0 avec $\varphi(0) = 0$
Donc : $\forall x \in D\setminus\{0\}\ \varphi(x) < 0$ Donc : $\boxed{\forall x \in D\setminus\{0\}\ f'(x) < 0}$
• On a : $\forall x \in D\setminus\{0\}\ f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to \frac{-1}{2}^+} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1}$

• D'où le tableau des variations

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-2	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1

Q5)



•• La fonction f est continue , strictement décroissante sur l'intervalle D donc f réalise une bijection de D vers $f(D) =]-1, +\infty[$.
Comme $0 \in f(D)$, on conclut que : $\boxed{\exists! \beta \in D\ f(\beta) = 0}$

Partie II

Q6)

Soit $x > 0$. On a $\ln(1+2x) > 0$ donc l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par $g : x \longmapsto \ln(1+2x)$

Donc $\boxed{u_n \text{ est bien défini pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \text{ avec } u_n > 0}$.

Q7)

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L. On a alors $L \geq 0$ par passage à la limite sur $u_n > 0$ pour tout n. Comme g est continue sur $[0, +\infty[$, on a : $g(L) = L$

$L = 0$ est une solution. Si $L > 0$, on a : $g(L) = L \Longleftrightarrow f(L) = 0 \Longleftrightarrow L = \beta$

Donc $\boxed{L \in \{0, \beta\}}$

Q8)

On étudie la fonction $g : x \longmapsto \ln(1+2x)$ sur $J = [0, +\infty[$

g est définie, strictement croissante sur J

De plus, pour $x > 0$: $g(x) - x = xf(x)$

d'où le tableau d'étude

x	0		β		$+\infty$
$g(x) - x$	0	$+$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

L'intervalle $]0, \beta]$ étant stable par g on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in]0, \beta]}$

Q9)

Sur $]0, \beta]$, on a $g(x) - x \geq 0$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

Comme la suite est croissante majorée, elle converge vers un réel supérieur ou égal à u_0 donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \beta}$.

Q10)

On suppose ici que $u_0 \in]\beta, +\infty[$

L'intervalle $]\beta, +\infty[$ est stable par g donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in]\beta, +\infty[}$

Sur $]\beta, +\infty[$, on a $g(x) - x < 0$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - u_n < 0$

Comme la suite est décroissante minorée, elle converge vers un réel supérieur ou égal à β puisque $u_n > \beta$ pour tout n donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \beta}$

Q11)

- La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{2}{1+2x}$

donc d'après le théorème des accroissement finis :

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists c_n \in]u_n, \beta[\ u_{n+1} - \beta = g(u_n) - g(\beta) = (u_n - \beta)g'(c_n)$

On sait que la suite u est croissante donc : $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \leq u_n \leq \beta$

donc $g'(c_n) \in \left]\dfrac{2}{1+2\beta}, \dfrac{2}{1+2}\right[$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{2}{3}|u_n - \beta|}$$

- Par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n - \beta| \leq (\frac{2}{3})^n |u_0 - \beta|$
- Vu l'encadrement de β, on a : $|u_0 - \beta| \leq 1$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n - \beta| \leq (\frac{2}{3})^n}$

Exercice Bonus (Théorème des cordes)

Q1) Cas $\alpha = \frac{1}{2}$: posons, pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$. Alors $g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0)$, $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2})$, or $f(0) = f(1)$, donc

$$g(0) = -g(\frac{1}{2})$$

or g est continue, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e.

$$f(x_0 + \frac{1}{2}) = f(x_0)$$

Cas général : $\alpha = \frac{1}{n}$: posons, pour $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$, $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$. Alors

$$\begin{aligned} g(0) &= f(\frac{1}{n}) - f(0) \\ g(\frac{1}{n}) &= f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n}) \\ &\dots \\ g(\frac{n-1}{n}) &= f(1) - f(\frac{n-1}{n}) \end{aligned}$$

en sommant on obtient $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$, car $f(0) = f(1)$. Donc, soit les $g(\frac{k}{n})$ de cette somme sont tous nuls et $x_0 = 0$ convient, soit il existe deux termes de signes opposés, et comme g est continue, il existe par le TVI un x_0 tel que $g(x_0) = 0$, i.e.

$$f(x_0 + \frac{1}{n}) = f(x_0)$$

Q2) Comme $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$, $\sin \frac{\pi}{\alpha} \neq 0$, donc f est bien définie. On vérifie $f(0) = f(1)$ sans peine, puis, pour tout $x \in [0, 1-\alpha]$,

$$f(x+\alpha) - f(x) = x + \alpha - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\alpha} - \pi\right)}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}} - x + \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}} = \alpha \neq 0$$