Mathématiques, devoir surveillé n°8

15 mars 2025, durée 4 heures

Les dispositifs électriques sont interdits.

Instructions de présentation : comme d'habitude

Tout résultat non justifié, non encadré ou souligné sera ignoré. Vérifiez vos calculs et vos raisonnements.

Exercice 1 : questions de cours

On donnera avec précision les énoncés des théorèmes avec leur contexte.

Q1 Énoncer le théorème du rang.
Q2 Énoncer la formule de Grassmann.
Q3 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer

$$\text{Im } f \subset \text{Ker } f \Leftrightarrow f^2 = 0$$

Exercice 2

Questions indépendantes

Q1 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X)P(X+1) = (P(X-1))^2$
(on rappelle que $P(X+1)$ désigne le polynôme composé $P \circ (X+1)$, i.e. le polynôme P dans lequel l'indéterminée X est remplacée par $X+1$).

Q2 Déterminer les racines dans $\mathbb{R}$ du polynôme $P = X^3 - 2X^2 - 19X + 20$.

Q3 Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $Q = X^4 + 5X^2 + 4$, puis factoriser Q en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 3z = 0 \text{ et } z - 2t = 0\}$.

Q1 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Q2 Déterminer une base de F.

Soit $G = \text{Vect}\,((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

Q3 Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4

Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$.

Q1 Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
Q2 Donner une base de H, et la dimension de H

Problème 1 : diagonalisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Soit $P = X^3 - 3X^2 - X + 3$.

Q1 Montrer que P a 3 racines réelles, que l'on notera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
Q2 Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer une base $\mathcal{B}_i$ de $H_i = \text{Ker } (u - \lambda_i Id_{\mathbb{R}^3})$. Les vecteurs de ces bases seront choisis de telle façon que leurs composantes soient entières, que leur première composante non nulle soit positive, et que le pgcd de leur composantes soit 1.
Q3 Montrer que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Q4 Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Q5 Déterminer D, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.
Q6 Calculer $P(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)$.
Q7 Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P.
Q8 En déduire une expression de A^n en fonction de I, A et A^2, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit 3 suites (a_n), (b_n), et (c_n) par :
$a_0 = b_0 = c_0 = 1$
et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$a_{n+1} = 2a_n + b_n$
$b_{n+1} = a_n + b_n + c_n$
$c_{n+1} = a_n + 2b_n$

Q9 Déterminer les limites de (a_n), (b_n), et (c_n).

Problème 2 : polynômes et endomorphismes

Soit g l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par

$$g(P) = P - (X+1)P' + X^2 P''$$

Q1 Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
Q2 Pour P non nul, comparer le degré de P et celui de $g(P)$.
Q3 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g induit un endomorphisme g_n de $\mathbb{R}_n[X]$, par $g_n : P \mapsto g(P)$.
Q4 Déterminer Ker g.
Q5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer Ker g_n.
Q6 En déduire le rang de g_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose désormais que $n = 3$.

Q7 Écrire la matrice de g_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
Q8 Déterminer une base de Im g_3.
Q9 A-t-on Ker $g_3 \oplus$ Im $g_3 = \mathbb{R}^3$.?