

Exercice 1

Q3) $\Rightarrow$: soit $x \in E$, $f(x) \in \text{Im} f \cap \text{Ker} f$ donc $f(f(x)) = 0$
 donc $f^2 = 0$ $\square$

$\Leftarrow$: soit $y \in \text{Im} f$, alors $y = f(x)$ avec $x \in E$, donc $f(y) = f(f(x)) = 0$
 car $f^2 = 0$, donc $f(y) = 0$, et donc $y \in \text{Ker} f$ $\square$

Exercice 2

Q1) si x est racine de P , alors $P(x)P(x+1) = 0 = (P(x-1))^2$
 donc $x-1$ racine de P , et de même, alors $x-2$ racine de P ,
 etc : P a donc une infinité de racines, et donc $P = 0$.
 si P n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$, alors P est constant non nul.
 $P = c$ alors $P(x)P(x+1) = (P(x-1))^2$ (théorème de d'Alembert)
 $\Rightarrow c^2 = c^2$

Conclusion : Les polynômes solutions sont les polynômes constants de $\mathbb{R}[X]$.

Q2) 1 est racine d'ordre 2, on a alors $P = (X-1)(X^2 - X - 20)$
 $= (X-1)(X+4)(X-5)$, les racines de P sont donc 1, -4 et 5

Q3) on pose $Y = X^2$, alors $Q = Y^2 + 5Y + 4$ $\Delta = 25 - 16 = 9$
 donc $Y = \frac{-5 \pm 3}{2} = -4$ ou -1

on a les racines de Q sont $2i, -2i, i$ et $-i$ dans $\mathbb{C}$

$$Q = (X-2i)(X+2i)(X-i)(X+i) = (X^2+4)(X^2+1) = Q$$

factorisation en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 3

Q1) on a $u = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 3z \\ z = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 6t \\ z = 2t \end{cases}$

$\Leftrightarrow u = (y - 6t, y, 2t, t) = y \underbrace{(1, 1, 0, 0)}_{u_1} + t \underbrace{(-6, 0, 2, 1)}_{u_2}$

$\Leftrightarrow u \in \text{Vect}(u_1, u_2)$

Q2) ainsi $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ → 2nd F de $\mathbb{R}^4$
or (u_1, u_2) libre (car non colinéaires) donc

$((1, 1, 0, 0), (-6, 0, 2, 1))$ base de F

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

Q3) appelons $u_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $u_4 = (0, 0, 0, 1)$

on a $\det(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ par développement

$= 6 \times 1 \times 1$ car triangulaire
 $\neq 0$

Donc (u_1, u_2, u_3, u_4) libre, or $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, donc c'est une base,
 et de plus adaptée à $F + G$, qui est donc directe:

$F + G = \mathbb{R}^4$ $\square$

Exercice 4

Q1) on a $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in H \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$
car $P' = 4aX^3 + 3bX^2 + 2cX + d$
 $P'' = 12aX^2 + 6bX + 2c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d = 0 \\ 12a + 6b + 2c = 0 \end{cases}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ et $X \leftarrow 1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - 12L_1$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ + b + 2c + 3d + 4e = 0 \\ + 6b + 10c + 12d + 12e = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ b + 2c + 3d + 4e = 0 \\ -2c - 6d - 12e = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow c + 3d + 6e = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -(3d + 8e) - (-3d - 6e) - d - e = -d - 3e \\ b = -2(-3d - 6e) - 3d - 4e = 3d + 8e \\ c = -3d - 6e \end{cases}$

$\Leftrightarrow P = (-d - 3e)X^4 + (3d + 8e)X^3 + (-3d - 6e)X^2 + dX + e$
 $= d \underbrace{(-X^4 + 3X^3 - 3X^2 + X)}_{P_1} + e \underbrace{(-3X^4 + 8X^3 - 6X^2 + 1)}_{P_2}$

ainsi $H = \text{Vect}(P_1, P_2)$ donc c'est un s.v.

Q2) on a (P_1, P_2) génératrice de H : libre?

$$\text{on a } \alpha P_1 + \beta P_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha - 3\beta = 0 \\ 3\alpha + 8\beta = 0 \\ -3\alpha - 6\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = 0$ et (P_1, P_2) libre

ainsi (P_1, P_2) base de H avec $P_1 = -X^4 + 3X^3 - 3X^2 + X$
 $P_2 = -3X^4 + 8X^3 - 6X^2 + 1$

et donc $\dim H = 2$

Problème 1

Q1) 1-2 valeurs propres par division on obtient $X-3$, donc $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$

Q2) soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $v \in \text{Ker}(\mu - \lambda_1 \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow v \in \text{Ker}(\mu + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y \\ \frac{5}{3}y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y \\ y = -\frac{3}{5}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}z \\ y = -\frac{3}{5}z \end{cases} \Leftrightarrow v = z \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $B_1 = ((1, -3, 5))$ base de H_1

puis $v \in \text{Ker}(\mu - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ x + 2(-x) - (-x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow v = x(-1, 1, 1)$ donc $B_2 = ((-1, 1, 1))$ base de H_2

puis $v \in \text{Ker}(\mu - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ -y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow v = z(1, 1, 1)$ donc $B_3 = ((1, 1, 1))$ base de H_3

Q3) soit v_1, v_2, v_3 les vecteurs de B_1, B_2, B_3

on a $\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 24 = -16 \neq 0$

non nul donc B est libre, or B a 3 éléments dans $\mathbb{R}^3$,
 donc B est une base de $\mathbb{R}^3$

Q4 par définition $S(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

Q5 $D = Q^{-1} A Q$ est la matrice de μ dans B^{-} , or $\mu(v_1) = -v_1$
 $\mu(v_2) = v_2$
 $\mu(v_3) = 3v_3$

donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ (suffit, ne pas calculer Q^{-1} !)

Q6 l'endomorphisme $(\mu - d_1 \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (\mu - d_2 \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (\mu - d_3 \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$

a pour matrice $(D - d_1 I_3)(D - d_2 I_3)(D - d_3 I_3)$ dans B^{-}

c'est-à-dire $\begin{pmatrix} (d_1 - d_1)(d_1 - d_2)(d_1 - d_3) & 0 & 0 \\ 0 & (d_2 - d_1)(d_2 - d_2)(d_2 - d_3) & 0 \\ 0 & 0 & (d_3 - d_1)(d_3 - d_2)(d_3 - d_3) \end{pmatrix}$

$= 0$ donc sa matrice dans B est nulle, ainsi

$(A - d_1 I)(A - d_2 I)(A - d_3 I) = 0$, d'où $S(A) = 0$

Q7 Soit $X^n = SP_n + R_n$ la division euclidienne de X^n par S ,
 ainsi $\deg R_n < \deg S = 3$ d'où $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$
 en remplaçant X par $-1, 1$ et 3 on obtient

$$\begin{cases} (-1)^n = \underbrace{S(-1)}_{=0} P_n(-1) + R_n(-1) = a_n - b_n + c_n & (1) \\ 1 = a_n + b_n + c_n & (2) \\ 3^n = 9a_n + 3b_n + c_n & (3) \end{cases}$$

donc $(2) + (1)$ $b_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$, $(3) - (2) \Rightarrow 8a_n + 2b_n = 3^n - 1$

donc $a_n = \frac{1}{8}(3^n - 1) - \frac{1}{2}b_n$

et $c_n = 1 - a_n - b_n = 1$

n pair: $b_n = 0$, $a_n = \frac{1}{8}(3^n - 1)$, $c_n = 1 - \frac{1}{8}(3^n - 1)$

n impair: $b_n = 1$, $a_n = \frac{1}{8}(3^n + 1) - \frac{1}{2}$, $c_n = 1 - \frac{1}{8}(3^n + 1) + \frac{1}{2} = 1$

Q8] donc $A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3, \forall n \in \mathbb{N}$,
 si n pair: $a_n = \frac{3^n}{8} - \frac{1}{8}, b_n = 0, c_n = -\frac{3^n}{8} + \frac{9}{8}$
 si n impair: $a_n = \frac{3^n}{8} + \frac{1}{8}, b_n = 1, c_n = -\frac{3^n}{8} + \frac{3}{8}$

Exercice 2:

Q9] $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, g(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q + (x+1)(\lambda P' + \mu Q') + x^2(\lambda P'' + \mu Q'')$
 $= \lambda P + \mu Q + (x+1)(\lambda P' + \mu Q') + x^2(\lambda P'' + \mu Q'')$
 $= \lambda g(P) + \mu g(Q)$ donc g est linéaire, $g(P) \in \mathbb{R}[X] \forall P \in \mathbb{R}[X]$
 donc $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$

Q10] on a $P = a_n X^n + Q$ avec $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ car $P \neq 0$
 donc $P' = n a_n X^{n-1} + Q'$ ($= 0$ si $n=0$)
 $P'' = n(n-1) a_n X^{n-2} + Q''$ ($= 0$ si $n=1$ ou 0)

et $g(P) = a_n X^n + Q - (x+1)(n a_n X^{n-1} + Q') + x^2(n(n-1) a_n X^{n-2} + Q'')$
 $= a_n (1 - n + n(n-1)) X^n + R$ où $\deg R < n$
 $= a_n (n-1)^2 X^n + R$

donc si $n \geq 2$, $\deg g(P) = \deg P = n$

si $n=1$, $\deg g(P) < \deg P$,

si $n=0$, $P' = P'' = 0$ et $g(P) = P$ donc $\deg g(P) = \deg P$

donc finalement, $\begin{cases} \text{si } n \neq 1, \deg g(P) = \deg P \text{ (même si } P=0) \\ n=1, \deg g(P) < \deg P \end{cases}$

Q11] on a par Q10] $\deg g(P) \leq \deg P$ donc

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $g|_{\mathbb{R}_n[X]} = g_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

Q12) ora $g(P)=0 \Rightarrow \deg P \leq 1$ par Q10

soit $P=aX+b$, $P'=a$, $P''=0$

donc $g(P)=aX+b-(X+1)a=b-a=0 \Leftrightarrow a=b$

d'où $\boxed{\text{Ker } g = \{a(X+1) / a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((X+1))}$

Q13) $n \geq 1$, donc $X+1 \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\boxed{\text{Ker } g_n = \text{Ker } g}$

Q14) le théorème du rang pour g_n nous dit

$$\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \text{Ker } g_n + \dim \text{Im } g_n$$

$$= \text{---} + \text{rg } g_n$$

$n \geq 1$, donc $n+1 = 1 + \text{rg } g_n$ d'où $\boxed{\text{rg } g_n = n}$

Q15) $g_3(1) = 1$

$g_3(X) = X - (X+1) \cdot 1 = -1$

$g_3(X^2) = X^2 - (X+1) \cdot 2X + X^2 \cdot 2 = X^2 - 2X^2 - 2X + 2X^2$

$$= X^2 - 2X$$

$g_3(X^3) = X^3 - (X+1) \cdot 3X^2 + X^3 \cdot 6X = X^3 - 3X^3 - 3X^2 + 6X^3$

$$= 4X^3 - 3X^2$$

d'où $\mathcal{M}_B(g_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

où $B = (1, X, X^2, X^3)$
base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

Q16) ora $\text{rg } g_3 = 3 = \dim \text{Im } g_3$, or les colonnes de $\mathcal{M}_B(g_3)$
sont génératrices de $\text{Im } g_3$, les 3 dernières sont libres (clairement
car échelonnées), donc $\boxed{(-1, X^2 - 2X, 4X^3 - 3X^2)} \text{ base de } \text{Im } g_3$

Q17) il faut lire $\text{Ker } g_3 \oplus \text{Im } g_3 = \underline{\underline{\mathbb{R}_3[X]}}$ bien sûr.

par Q10) on voit que $\deg(g_3(P)) \neq 1$, donc $X+1 \notin \text{Im } g_3$

donc $\underline{\text{Ker } g_3 \cap \text{Im } g_3 = \{0\}}$

$$\text{donc } \dim(\text{Ker } g_3 + \text{Im } g_3) = \dim \text{Ker } g_3 + \dim \text{Im } g_3 - \dim(\text{Ker } g_3 \cap \text{Im } g_3) \\ = 1 + 3 - 0 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$$

Donc $\text{Ker } g_3 + \text{Im } g_3 = \mathbb{R}_3[X]$

Donc $\text{Ker } g_3$ et $\text{Im } g_3$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$