Mathématiques, devoir surveillé n°9

3 mai 2025, durée 4 heures

Les dispositifs électriques sont interdits.

Instructions de présentation : comme d'habitude

Tout résultat non justifié, non encadré ou souligné sera ignoré. Vérifiez vos calculs et vos raisonnements.

Partie algèbre

Exercices : déterminants

Questions indépendantes.

Q 1 Calculer, sous forme factorisée, $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

Q 2 Calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 1$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

Problème : endomorphismes cycliques

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est *cyclique* ssi il existe un vecteur a de E tel que $(a, f(a), f^2(a), ..., f^{n-1}(a))$ soit une base de E.

La seconde partie du problème est indépendante de la première partie, consacrée à l'étude d'exemples.

Partie A. Étude d'exemples

On considère que $E = \mathbb{R}^2$.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Q 3 Soit $a = (2, 3)$, déterminer $g(a)$ et montrer que g est cyclique.

Q 4 Déterminer $g^2(a)$ puis déterminer deux réels x et y tels que $g^2(a) = xa + yg(a)$.

Q 5 Déterminer la matrice A' de g dans la base $(a, g(a))$.

Q 6 Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(g - 2\,\mathrm{Id}_E)$.

Q 7 Déterminer un vecteur non nul b tel que $(b, g(b))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$.

On considère maintenant que $E = \mathbb{R}^3$.

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Q 8 Montrer que h est un automorphisme de de $\mathbb{R}^3$.

Q 9 Déterminer une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de h est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et préciser la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Q 10 Montrer que $h^2 - 3h + 2\,\mathrm{Id}_E = 0$.

Q 11 En déduire que h n'est pas cyclique.

On considère désormais que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, i.e. le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini pour tout polynôme P par $u(P) = P'$

Q 12 Déterminer $u(X^{n-1})$, puis, pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$, déterminer $u^k(X^{n-1})$.

Q 13 En déduire que u est cyclique.

Partie B. Étude d'un exemple

On considère que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Soit v l'application qui à tout polynôme P associe $v(P) = P(X+1) - P(X)$

Q 14 Soit $k \in \{1, ..., n-1\}$. Montrer que $\deg(v(X^k)) = k - 1$.

Q 15 Montrer que v est un endomorphisme de E.

Q 16 Soit $P \in E$ avec $\deg P \geqslant 1$. Montrer $\deg(v(P)) = \deg P - 1$.

Q 17 Montrer que v est cyclique.

Q 18 Déterminer le noyau de v (on en donnera une base).

Q 19 En déduire $\mathrm{Im}\, v$.

Q 20 On définit $P_0 = 1$, et pour $k \in \{1, ..., n-1\}$,

$$P_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$$

Q 21 Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, ..., P_{n-1})$ est une base de E.

Q 22 Dans cette question, supposons $n = 4$. Déterminer les coordonnées du polynôme $X^3 - 5X^2 + X - 3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Q 23 Montrer que pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$, $v(P_k) = P_{k-1}$.

Q 24 En déduire une autre démonstration que v est cyclique.