DS7 Corrigé

Exercices

Q1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\left(c^2+ac+a^2-(b^2+ab+a^2)\right) = (b-a)(c-a)\left(c^2-b^2+a(c-b)\right)$$

$$\boxed{D = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}$$

Q2 avec $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$
puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}$
⋮
puis $C_2 \leftarrow C_2 \leftarrow C_1$

on a $D_n = \begin{vmatrix} a & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b-a \\ b & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1} \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ b & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (a-b)^{n-1}\left(a \begin{vmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} + b \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} \right)$$

avec $\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 1 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta_{n-1} = 1 + \Delta_{n-2}$

donc $\underline{\Delta_{n-1} = n-1}$ (car $\Delta_1 = 1$)

d'où $\boxed{D_n = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)}$

Problème II

PARTIE A

Q11 $g(a) = A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $\boxed{g(a) = (-10, -1)}$, $\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2+10 = 8 \neq 0$

abus de notation!

donc $\det(a, g(a)) \neq 0$, donc $(a, g(a))$ libre, d'où $\boxed{g \text{ cyclique}}$ car $n=2$ ici.

Q12 $g^2(a) = A\, g(a) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40+6 \\ -10+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $g^2(a) = xa + y g(a)$

$$\iff \begin{cases} 2x - 10y = -34 \\ 3x - y = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} -30y + 2y = -3\times 34 + 18 \\ 3x = y - 9 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}}$$

Q13

$$\boxed{A' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g(a) & g^2(a) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} a \\ g(a) \end{array}}$$

car $g(a) = 0 \times a + 1\, g(a)$
$g^2(a) = -2a + 3g(a)$

Q14 on a $u = (x,y) \in \mathrm{Ker}(g - 2\mathrm{Id}_E) \iff g(u) = 2u \iff \begin{cases} 4x - 6y = 2x \\ x - y = 2y \end{cases}$

car $g(u) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, d'où $\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x = 3y \iff u = y(3,1)$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(g - 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((3,1))}$

Q15 $b=(3,1)$ convient car $g(b)=2b$ donc $\boxed{(b, g(b)) \text{ lié, donc pas base de } \mathbb{R}^2.}$

Q16 $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-4+6) = 4 \neq 0$

donc h injective, or h est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie, donc h est bijective, donc <u>un automorphisme de $E=\mathbb{R}^3$</u>

Q17 en utilisant Q14, on voit que si $\boxed{v=(0,3,1)}$ on a $h(u)=2u$ car A comme sous-matrice la matrice de g dans les questions précédentes.

De plus, il est facile de voir que $h(e_1)=2e_1$, on peut prendre $\boxed{u=e_1}$

Cherchons $w=(x,y,z)\in \mathrm{Ker}(h-\mathrm{Id})$, i.e. $h(w)=w$:

on a $\begin{cases} 2x = x \\ 4y-6z = y \\ y-z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3y-6z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ d'où $\boxed{w=(0,2,1)}$ convient

on vérifie (u,v,w) libre car $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-2 = 1 \neq 0$

Donc dans la base (u,v,w), la matrice de h est $\boxed{D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h(u) & h(v) & h(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}}$

Alors $\boxed{P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}}$

Q18 on a $h^2-3h+2\mathrm{Id}=0 \Leftrightarrow A^2-3A+2I=0 \Leftrightarrow P^{-1}(A^2-3A+2I)P=0$

$\Leftrightarrow P^{-1}A^2P-3P^{-1}AP+2P^{-1}P=0 \Leftrightarrow D^2-3D+2I=0$

ce qui est immédiat : $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

car 2 et 1 sont racines de X^2-3X+2.

Q19 pour tout $a\in E$, $h^2(a)-3h(a)+2a=0$ par Q18, donc $(a, h(a), h^2(a))$ est liée, or $n=3$ donc $\boxed{h \text{ n'est pas cyclique.}}$

Q20 $u(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$, $u^2(X^{n-1}) = (n-1)(n-2)X^{n-3}$, ...
d'où, par une récurrence immédiate, $u^k(X^{n-1}) = (n-1)\cdots(n-k)X^{n-k-1}$
d'où $u^k(X^{n-1}) = \dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}X^{n-k-1}$, ceci pour $k=1,\dots,n-1$

Q21 on a $\deg(u^k(X^{n-1})) = n-1-k$, pour $k=0,1,\dots,n-1$
donc la famille $(X^{n-1}, u(X^{n-1}), \dots, u^{n-1}(X^{n-1}))$ est échelonnée en degré, donc libre : donc $\boxed{u \text{ est cyclique}}$

PARTIE B

Q22 $v(X^k) = (X+1)^k - X^k = \underbrace{X^k + \binom{k}{1}X^{k-1} + \binom{k}{2}X^{k-2} + \dots + \binom{k}{k-1}X + 1}_{\text{binôme}} - X^k$
$= kX^{k-1} + \cdots$ or $k \neq 0$ donc $\boxed{\deg v(X^k) = k-1}$

Q23 on a $\deg v(P) \leqslant \deg P$ donc v est à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$;
de plus, si $P, Q \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X)$
$= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda v(P) + \mu v(Q)$,
donc v est linéaire, d'où $\boxed{v \in \mathcal{L}(E)}$

Q24 soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $d = \deg P \leqslant n-1$, v linéaire
donc $v(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k v(X^k)$, or $\deg v(X^k) = k-1$ si $k \geqslant 1$, $v(1) = 0$
donc $\underline{\deg(v(P))} = \deg v(X^d) = d-1 = \underline{\deg P - 1}$ □

Q25 la famille $(X^{n-1}, v(X^{n-1}), \dots, v^{n-1}(X^{n-1}))$ est échelonnée en degré, car d'après Q24 et une récurrence immédiate,
$\deg(v^k(X^{n-1})) = n-1-k$, donc $\boxed{v \text{ est cyclique.}}$

Q26 on a $v(P) = 0 \Rightarrow \deg P = 0$, car d'après Q24, $\deg P \geqslant 1 \Rightarrow \deg v(P) = 0$ donc $v(P) \neq 0$ ($\deg 0 = -\infty$)
d'où $P = \lambda \in \mathbb{R}^*$, ainsi $\boxed{\operatorname{Ker} v = \operatorname{Vect}(1)}$ $\boxed{\text{et } (1) \text{ base de } \operatorname{Ker} v.}$

Q27 d'après le théorème du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v$,
donc $\underline{\dim \operatorname{Im} v = n-1}$

or Q24 montre $\deg(v(P)) \leq n-2$, donc $\mathrm{Im}\, v \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ qui est de dimension $n-1$, donc $\boxed{\mathrm{Im}\, v = \mathbb{R}_{n-2}[X]}$

Q28 rien à répondre ... bug de l'énoncé ...

Q29 on a clairement $\deg P_k = k$ donc $B' = (P_0, \dots, P_{n-1})$ est échelonnée en degré, donc libre, or $\dim E = n$, donc $\boxed{\text{c'est une base de } E}$

Q30 $n=4$: on cherche a, b, c, d tq

$$X^3 - 5X^2 + X - 3 = aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3$$
$$= a + bX + c\frac{1}{2}X(X-1) + d\frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$$
$$= a + \cancel{bX} + \cancel{\frac{c}{2}X^2} - \cancel{\frac{c}{2}X} + \cancel{\frac{d}{6}X^3} - \cancel{\frac{dX^2}{2}} + \cancel{\frac{dX}{3}}$$

$X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$

$$= \frac{d}{6}X^3 + \left(\frac{c}{2} - \frac{d}{2}\right)X^2 + \left(b - \frac{c}{2} + \frac{d}{3}\right)X + a$$

d'où $\begin{cases} \frac{d}{6} = 1 \\ \frac{c}{2} - \frac{d}{2} = -5 \\ b - \frac{c}{2} + \frac{d}{3} = 1 \\ a = -3 \end{cases}$ donc $d = 6$, $c = 2(-5+3) = -4$

$b = 1 - 2 - 2 = -3$

$a = -3$

$\boxed{\text{donc les coordonnées dans } B' \text{ de } X^3 - 5X^2 + X - 3 \text{ sont } (-3, -3, -4, 6)}$

Q31 on a $\underline{v(P_k)} = P_k(X+1) - P_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$

$$= \frac{1}{k!}\Big((X+1)X(X-1)\cdots(X-k+2) - X(X-1)\cdots(X-k+2)(X-k+1)\Big)$$
$$= \frac{1}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+2)\Big((X+1) - (X-k+1)\Big) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)(1+k-1)$$
$$= \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) = \overline{P_{k-1}} \quad \boxtimes$$

Q32 on déduit de Q31 et $\deg P_k = k$ que $(P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_0)$ $= (P_{n-1}, v(P_{n-1}), \dots, v^{n-1}(P_{n-1}))$ est échelonnée en degré, donc libre,

donc $\boxed{v \text{ est cyclique}}$