TD chapitre 17 : espaces euclidiens

Exercice 1

(4113)

Produit scalaire et matrices

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B).$$

Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\big(\mathrm{tr}(AB)\big)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 2

(4114)

Des exemples de produit scalaire

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$;

$\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $]a, b[$.

Exercice 3

(4115)

CNS pour avoir un produit scalaire

Soient E un espace préhilbertien réel, $a \in E$ un vecteur unitaire et $k \in \mathbb{R}$. On définit $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(x, y) = \langle x, y \rangle + k\langle x, a \rangle \langle y, a \rangle.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que ϕ soit un produit scalaire.

Exercice 4

(4116)

CNS pour avoir un produit scalaire

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$, on pose

$$\phi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'.$$

Déterminer une condition nécessaire sur a, b, c, d pour que ϕ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

(4117)

Quand une inégalité en implique une autre...

Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Démontrer que $(x + y + z)^2 \leq \dfrac{17}{10}$.

Exercice 6

(4118)

Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$.

Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$ et que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice 7

(4121)

Relations usuelles sur les orthogonaux

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.

$(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

$A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp$;

$\mathrm{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.

On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\mathrm{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

Exercice 8

(4122)

Orthogonal, somme et intersection

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

Que se passe-t-il en dimension finie ?

Exercice 9

(4130)
Un produit scalaire sur les polynômes

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur E.

Déterminer une base orthonormée de E.

Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace

$$H = \left\{ P \in E;\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}.$$

Exercice 10

(4140)
Si on enlève la linéarité....

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Démontrer que l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale.

En déduire que f est linéaire.

Exercice 11

(1295)
Soit $E = \mathcal{C}^1([0\,; 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\underset{\cdot}{t}$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 12

(1304)
Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Étudier les cas d'égalités.

Exercice 13

(1305)
Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Préciser les cas d'égalité.