

Corrigé TD chapitre 17 : espaces euclidiens

Exercice 1 (4113)

Il est très facile de vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit une forme bilinéaire symétrique. Reste à démontrer qu'elle est définie positive. Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ et notons $(b)_i = A^T A$. Alors

$$(b)_i = \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2 \geq 0.$$

Ainsi,

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n (b)_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2 \geq 0.$$

On a bien affaire à une forme positive. De plus, si $\langle A, A \rangle = 0$, alors pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $k = 1, \dots, n$, on a $a_{ik} = 0$, et donc $A = 0$: la forme est définie.

On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour A, B symétriques, on a en effet

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$$

et donc

$$(\text{tr}(AB))^2 \leq \text{tr}(A^2) \text{tr}(B^2).$$

Exercice 2 (4114)

Dans les deux exemples, la difficulté est de démontrer qu'on a affaire à une forme définie.

Si $\langle f, f \rangle = 0$, alors on a à la fois $(f(0))^2 = 0$, donc $f(0) = 0$, et

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0.$$

Or, $(f')^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$. Puisque son intégrale est nulle, c'est que f' est nulle sur $[0, 1]$. On en déduit que f est constante sur $[0, 1]$, puis, comme $f(0) = 0$, que f est identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Si $f \in E$ est tel que $\langle f, f \rangle = 0$, le même raisonnement donne que $f^2 w = 0$ sur $[a, b]$, donc, puisque w ne s'annule pas sur $]a, b[$, que $f = 0$ sur $]a, b[$. Par continuité, on en déduit que $f = 0$ sur $[a, b]$ et donc que $f \equiv 0$. La forme est bien définie positive.

Exercice 3 (4115)

ϕ définit clairement une forme bilinéaire symétrique. Reste à trouver une condition nécessaire et suffisante sur k pour qu'elle soit définie positive. On commence par calculer $\phi(a, a) = (1+k)\|a\|^2$. Pour que ceci soit strictement positif, il est nécessaire que $1+k > 0$. La condition $k > -1$ est donc nécessaire pour que ϕ soit un produit scalaire. Réciproquement, on suppose que $k > -1$ et on va prouver que ϕ définit bien un produit scalaire. Pour cela, on distingue deux cas. D'une part, si $k \geq 0$, alors pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, on a

$$\phi(x, x) \geq \|x\|^2 > 0.$$

D'autre part, si $k \in]-1, 0[$, alors $k = -\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$. On a alors, pour $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\phi(x, x) = \|x\|^2 - \alpha \langle x, a \rangle^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et puisque a est un vecteur unitaire,

$$\langle x, a \rangle^2 \leq \|x\|^2,$$

et donc

$$\phi(x, x) \geq (1 - \alpha)\|x\|^2 > 0.$$

Dans tous les cas, on a prouvé que ϕ est définie positive, donc qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E .

Exercice 4

(4116)

Supposons que ϕ est un produit scalaire. D'abord, pour que ϕ soit symétrique, il est nécessaire que $\phi(u, v) = \phi(v, u)$ pour tous vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$. Pour $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$, on a

$$\phi(u, v) = b \text{ et } \phi(v, u) = c$$

et donc il est nécessaire que $b = c$. D'autre part, ϕ est définie positive. De $\phi(u, u) > 0$ pour $u = (1, 0)$, on trouve $a > 0$. Posons maintenant $u = (x, y)$ et calculons $\phi(u, u)$:

$$\begin{aligned} \phi(u, u) &= ax^2 + 2bxy + dy^2 \\ &= a \left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{ad - b^2}{a}y^2. \end{aligned}$$

Si $x = -b$ et $y = a$, alors on trouve

$$\phi(u, u) = a(ad - b^2)$$

et pour que ceci soit strictement positif, il est nécessaire que $ad - b^2 > 0$. Réciproquement, supposons que $a > 0$, que $b = c$ et que $ad - b^2 > 0$. Alors il est facile de vérifier que ϕ est symétrique. De plus, l'écriture

$$\phi(u, u) = a \left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{ad - b^2}{a}y^2$$

prouve que ϕ est bien définie positive. En effet, si $\phi(u, u) = 0$, alors $y = 0$ et $x + \frac{b}{a}y = 0$ ce qui donne bien $x = y = 0$.

Exercice 5

(4117)

Il suffit d'écrire :

$$x + y + z = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}x + 1 \times y + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}z.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$), on a

$$(x + y + z)^2 \leq \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) \times (2x^2 + y^2 + 5z^2) \leq \frac{17}{10}.$$

Exercice 6

(4118)

On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ avec les vecteurs $x = (x_0, \dots, x_n)$ et $y = (1, \dots, 1)$. On trouve

$$\sum_{i=0}^n \|x_i\| y_i = \sum_{i=0}^n \|x_i\| \leq \left(\sum_{i=0}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^n 1^2 \right)^{1/2}.$$

Prenant le carré de cette inégalité, on obtient l'inégalité désirée. De plus, il y a égalité si et seulement si l'on a l'égalité dans l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(1, \dots, 1)$ sont liés ; autrement dit, si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $y = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $z = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.

Alors on trouve

$$n = \sum_{i=1}^n \|y\| \|z\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|y\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|z\|^2\right)^{1/2}$$

ce qui, mis au carré, donne l'inégalité demandée. Comme précédemment, on a l'égalité si et seulement si les vecteurs y et z sont liés. Puisqu'ils sont tous les deux à coordonnées strictement positives, c'est équivalent à

dire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $x_i = \frac{\lambda}{x_i}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ainsi, tous les x_i sont égaux et de la relation $x_1 + \dots + x_n = 1$, on tire $x_i = \frac{1}{n}$. Ainsi, il y a égalité si et seulement si $x_i = \frac{1}{n}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Exercice 7

(4121)

Soit $y \in B^\perp$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et donc $\langle x, y \rangle = 0$, ce qui prouve que $y \in A^\perp$.

On commence par prendre $x \in (A \cup B)^\perp$, et prouvons que $x \in A^\perp$. En effet, si $y \in A$, on a $y \in A \cup B$, et donc $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci montre la première inclusion. Réciproquement, si $x \in A^\perp \cap B^\perp$, prenons $y \in (A \cup B)$. Alors si $y \in A$, on a bien $\langle x, y \rangle = 0$ puisque $x \in A^\perp$, et le cas où $y \in B$ se résout de la même façon.

D'après la première question, puisque $A \subset \text{vect}(A)$, on a

$$\text{vect}(A)^\perp \subset A^\perp.$$

Réciproquement, si $y \in A^\perp$, prenons $x \in \text{vect}(A)$. Alors on peut trouver des éléments $a_1, \dots, a_n$ de A et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \rangle \\ &= \lambda_1 \langle x, a_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle x, a_n \rangle \\ &= \lambda_1 0 + \dots + \lambda_n 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc $y \in \text{vect}(A)^\perp$.

On va commencer par prouver que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Mais, soit $x \in A$. Choisissons $y \in A^\perp$. On a alors $\langle x, y \rangle = 0$, ce qui prouve que $x \in (A^\perp)^\perp$. D'autre part, $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A . Il contient donc le sous-espace vectoriel engendré par A et on a bien l'inclusion demandée.

Notons $B = \text{vect}(A)$ et $n = \dim(E)$. Alors d'après la question précédente,

$$(A^\perp)^\perp = (B^\perp)^\perp.$$

D'autre part,

$$\dim(B^\perp) = n - \dim B \implies \dim((B^\perp)^\perp) = n - \dim(B^\perp) = \dim(B).$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a $B \subset (B^\perp)^\perp$ et ces deux sous-espaces ont la même dimension. Ils sont donc égaux !

Exercice 8

(4122)

On remarque d'abord que si $A \subset B$, alors on a $B^\perp \subset A^\perp$, ce qui est immédiat en appliquant la définition. Ainsi, puisque $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on obtient $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Prenons maintenant $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Tout $z \in F + G$ s'écrit $z = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors :

$$(x, z) = (x, f) + (x, g) = 0,$$

ce qui prouve que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$. D'autre part, on a $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, ce qui donne respectivement $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Puisque $(F \cap G)^\perp$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par addition, et donc on a $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Dans le cas où E est un espace de dimension finie, on peut obtenir l'autre inclusion en comparant les dimensions des sous-espaces :

$$\begin{aligned} \dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\ &= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F + G)^\perp \\ &= \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F + G) \\ &= \dim(E) - \dim(F \cap G) \\ &= \dim((F \cap G)^\perp). \end{aligned}$$

Exercice 9

(4130)

Il est clair qu'on définit ainsi une forme bilinéaire symétrique et que $\langle P, P \rangle \geq 0$. De plus, si $\langle P, P \rangle = 0$, alors

$$\sum \| \text{r}^n P^2(a) \| = 0 \implies P(a) = 0 \text{ pour } k = 1, \dots, n.$$

Or, un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul. Donc $P = 0$ et la forme bilinéaire est définie positive : c'est un produit scalaire.

Contrairement à ce que l'on fait souvent, ici, utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale n'est pas la bonne idée. Il faut plutôt raisonner en terme de racines et voir que si P s'annule en beaucoup de a , alors $P(a)Q(a)$ sera souvent nul. On va donc définir, pour $k = 0, \dots, n$

$$P_k = \prod_{i \neq k} \| (X - a_i) \|.$$

Il est clair que, pour $k \neq l$, on a

$$\langle P_k, P_l \rangle = P_k(a_l) P_l(a_k) = 0.$$

La famille est donc orthogonale. On l'orthonormalise en remarquant que

$$\| P_k \|^2 = \prod_{i \neq k} \| (a_i - a_k) \|^2$$

et on pose donc

$$Q_k = \frac{P_k}{\| P_k \|}.$$

$(Q_0, \dots, Q_n)$ est une famille orthonormale de $n + 1$ éléments dans un espace de dimension $n + 1$. C'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

On va trouver un vecteur normal à l'hyperplan H . C'est très facile en regardant la définition de H , car si on pose $R = 1$, on a

$$\langle P, R \rangle = \sum \| \text{r}^n P(a) \|.$$

R est donc un vecteur normal à H . Par une formule du cours (très facile à retrouver par un dessin), on en déduit que la distance de Q à H est

$$\frac{\langle Q, R \rangle}{\|R\|} = \frac{\sum \|r^n Q(a)\|}{\sqrt{n+1}}.$$

Exercice 10 (4140)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Alors on a, pour tout i, j dans $\{1, \dots, n\}$,

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$$

ce qui prouve bien que $(f(e_i))$ est une base orthonormale de E .

On travaille toujours dans la base orthonormée précédente. Prenons $x \in E$ et écrivons-le

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Alors

$$\langle f(x), f(e_j) \rangle = \langle x, e_j \rangle.$$

De plus, puisque $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E , on sait que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n \langle f(x), f(e_i) \rangle f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle f(e_i). \end{aligned}$$

Autrement dit, on a prouvé que si on écrit $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle f(e_i)$. Ceci suffit à prouver que f est linéaire. En effet, prenons également $y = \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle e_i \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a d'une part :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle f(e_i) \\ f(y) &= \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle f(e_i) \\ f(x) + \lambda f(y) &= \sum_{i=1}^n \langle x + \lambda y, e_i \rangle f(e_i) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= \sum_{i=1}^n \langle x + \lambda y, e_i \rangle e_i \\ f(x + \lambda y) &= \sum_{i=1}^n \langle x + \lambda y, e_i \rangle f(e_i) \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que f est linéaire.

Exercice 11 (1295)

φ est clairement une forme bilinéaire symétrique. On a aussi $\varphi(f, f) \geq 0$ et

$$\varphi(f, f) = 0 \langle 10233 \rangle f(0) = 0 \text{ et } f' = 0$$

car f'^2 est continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit

$$\varphi(f, f) = 0 \langle 10233 \rangle f = 0$$

Exercice 12

(I304)

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n 1^2 \right) = n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Il y a égalité si, et seulement si, $(x_1, \dots, x_n)$ et $(1, \dots, 1)$ sont colinéaires i.e. : $x_1 = \dots = x_n$.

Exercice 13

(I305)

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_k}} \sqrt{x_k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \sum_{k=1}^n x_k$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2 \text{ De plus, il y a égalité si, et seulement si, il y a colinéarité des } n\text{-uplets}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right) \text{ et } (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$$

ce qui correspond au cas où

$$\frac{\sqrt{x_1}}{1/\sqrt{x_1}} = \dots = \frac{\sqrt{x_n}}{1/\sqrt{x_n}}$$

soit encore

$$x_1 = \dots = x_n = 1/n$$