

# Devoir libre de probabilités

## Problème 1

Soient 4 dés à six faces non pipés (les faces sont équiprobables et tous les lancers sont indépendants). Le dé  $A$  a pour faces 3; 3; 3; 3; 3; 3. Le dé  $B$  a pour faces 2; 6; 2; 6; 2; 2. Le dé  $C$  a pour faces 1; 5; 1; 5; 1; 5. Le dé  $D$  a pour faces 4; 0; 4; 0; 4; 4. Lorsque deux joueurs s'affrontent, ils lancent chacun un dé (les deux dés étant différents). Le gagnant est celui dont la face du dessus du dé comporte le chiffre le plus grand.

1. Montrer que si Ben joue avec le dé  $A$ , et Jerry avec le dé  $B$ , alors Ben a une probabilité de gagner égale à  $2/3$ .
2. Montrer que si Ben joue avec le dé  $B$ , et Jerry avec le dé  $C$ , alors Ben a une probabilité de gagner strictement plus grande qu'un demi. Calculer cette probabilité.
3. Montrer que si Ben joue avec le dé  $C$ , et Jerry avec le dé  $D$ , alors Ben a une probabilité de gagner strictement plus grande qu'un demi. Calculer cette probabilité.
4. Que se passe-t-il si Ben joue avec le dé  $D$ , et si Jerry joue avec le dé  $A$  ?
5. On suppose dans cette question que Ben a le droit de sélectionner un des 4 dés, et que ensuite Jerry peut choisir parmi les 3 dés restants. Puis chacun des deux joueurs lance son dé, et le gagnant est celui qui obtient le chiffre le plus grand. Préférez-vous être à la place de Ben ou de Jerry ? Justifiez votre réponse.
6. Toujours avec le jeu de la question précédente, on suppose que Ben doit payer 1 euro à Jerry si Jerry gagne, et que Jerry doit payer  $\alpha \geq 0$  euros à Ben si Ben gagne. On suppose que Ben n'accepte de jouer que si son gain moyen est positif ou nul. Donner l'ensemble des  $\alpha$  pour lesquels Ben accepterait de jouer.

## Problème 2

🕒🕒 Chou le chaton a trois passions dans la vie — manger, dormir et jouer — et on peut considérer qu'il pratique ces activités par tranches de 5min.

- Après 5min de repas, il continue de manger les 5min suivantes avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et sinon se met à jouer.
- Après 5min de somme, il continue de dormir les 5min suivantes avec probabilité  $\frac{3}{4}$  et sinon il a faim au réveil et va manger.
- Après 5min de jeu, soit il est en appétit et mange les 5min suivantes avec probabilité  $\frac{1}{4}$ , soit il est fatigué et s'endort.

Un matin, Chou se lève et passe ses 5 premières minutes à petit-déjeuner. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $m_n$  la probabilité qu'il mange entre les minutes  $5n$  et  $5n + 5$ ,  $d_n$  la probabilité qu'il dorme et  $j_n$  la probabilité qu'il joue, et

on pose  $C_n = \begin{pmatrix} m_n \\ d_n \\ j_n \end{pmatrix}$ .

- 1) Trouver une matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  pour laquelle  $C_{n+1} = MC_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2) a) Calculer  $4M^3 - 5M^2$ , puis en déduire un polynôme annulateur  $P$  de  $M$ .  
b) En déduire les puissances de  $M$ .  
c) En déduire les limites de  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Que dire de la journée de Chou ?