Mathématiques : devoir surveillé n°10

Samedi 10 juin 2017. Durée 4 heures. Pas de calculatrice.

Instructions de présentation

- Sur la première page : indiquer dans l'ordre de l'énoncé la page de début de chaque exercice.
- Commencer chaque exercice en haut d'une nouvelle page.
- Encadrer les résultats.

Pour les exercices de probabilités, on veillera à utiliser le vocabulaire et les notations du cours, à justifier les résultats et à bien mentionner les formules du cours employées.

Exercice 1

Q1. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$?

Etablir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

Q2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$

Q3. $\displaystyle\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$

Q4. $\displaystyle\sum \frac{n^2+n-1}{n!}$

Exercice 2

Déterminer la nature des séries suivantes :

Q5. $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (on cherchera un équivalent du numérateur).

Q6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\cos\frac{1}{n}$

Q7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}$

Exercice 3

Q8. Etudier la convergence de la suite de terme général, où $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

(on étudiera la série de terme général $a_n = u_n - u_{n-1}$).

Problème 1

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce de monnaie biaisée, avec laquelle on obtient *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1-p$, ainsi qu'une urne contenant 3 boules noires et 4 boules blanches, indiscernables au toucher.

1. On lance trois fois de suite la pièce de monnaie (les trois lancers étant indépendants).
   Étant donné $k \in [\![0,3]\!]$, calculer la probabilité d'obtenir exactement k fois *Pile*.
2. Après avoir lancé trois fois la pièce, on décide d'extraire simultanément autant de boules dans l'urne que le nombre d'apparitions de *Pile*.
   (a) Soit $(k,\ell) \in [\![0,3]\!]^2$.
   Sachant que l'on a obtenu exactement k fois *Pile* lors des lancers de la pièce, quelle est la probabilité d'obtenir exactement ℓ boules noires à l'issue du tirage ?
   On distinguera, pour ce calcul, le cas où $k < \ell$ du cas où $k \geqslant \ell$.
   (b) Calculer, pour $\ell \in [\![0,3]\!]$, la probabilité de tirer exactement ℓ boules noires.
   Ici, on ne suppose plus connu le nombres de Pile obtenus.
3. On n'a tiré aucune boule noire.
   Quelle est la probabilité de n'avoir obtenu aucun *Pile* lors des lancers de la pièce ?

Problème 2

Bart, Lisa et Milhouse jouent à se tirer dessus (avec des pistolets à eau). Ils atteignent leur cible avec les probabilités respectives $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, indépendamment les uns des autres.

Le jeu consiste en une succession d'épreuves. A chaque épreuve, chacun de ceux qui n'ont pas encore été touchés tire sur son adversaire le plus habile (ainsi le premier tir de Bart est-il dirigé vers Lisa alors que les deux autres garnements tirent sur Bart). Dès que l'un des protagonistes a été touché, il est éliminé du jeu.

Lors de chaque étape, les tirs partent simultanément, de sorte que plusieurs joueurs peuvent être éliminés en même temps.

On peut désigner un vainqueur quand il ne reste plus qu'un seul tireur n'ayant pas été touché.

On notera BLM_n l'événement : « il reste Bart, Lisa et Milhouse à l'issue de l'épreuve n » et BL_n l'événement : « il ne reste que Bart et Lisa à l'issue de l'épreuve n ». Ainsi BLM_0 est l'événement certain, alors que BL_0 est impossible.

On définit de manière analogue les événements $BM_n, LM_n, B_n, L_n, M_n$.

Si L_n est réalisé, on considèrera que L_{n+1} aussi, puisque Lisa ne peut plus être éliminé.

On remarque par exemple que si l'évènement M_n est advient, alors tous les M_{n+p} avec $p \in \mathbb{N}$ sont réalisés aussi.

Dans la suite, on a toujours $n \in \mathbb{N}$.

Calculs préliminaires

On considère une épreuve d'entrainement à laquelle participent les trois tireurs. On note R_B l'évènement Bart réussit son tir et M_B l'évènement Bart manque son tir. On définit de même R_L, M_L, R_M, M_M.

3.1. Exprimer à l'aide de ces évènements : "Bart manque son tir et Lisa ou Milhouse réussissent le leur".

3.2. Calculer la probabilité de cet évènement.

3.3. Calculer également la probabilité de l'évènement "Bart réussit son tir et Lisa ou Milhouse réussissent le leur".

3.4. Que vaut $p(BL_n)$?

3.5. Déterminer $p(BLM_n)$.

Détermination de probabilités conditionnelles

Donner sans justifier longuement la valeur des probabilités conditionnelles suivantes :

3.6. $p_{BLM_n}\left(LM_{n+1}\right)$

3.7. $p_{BLM_n}\left(M_{n+1}\right)$

3.8. $p_{BLM_n}\left(B_{n+1}\right)$

3.9. $p_{BLM_n}\left(BM_{n+1}\right)$

3.10. $p_{BLM_n}\left(L_{n+1}\right)$

Probabilités de victoire

3.11. Justifier que $BM_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} BLM_k \cap BM_{k+1} \cap .. \cap BM_n$. En déduire une expression de $p\left(BM_n\right)$.

On exprimera le résultat final sans le signe somme (la somme éventuelle se calcule)

3.12. Calculer de même $p\left(LM_n\right)$.

3.13. Calculer la probabilité e_n pour que le jeu ne soit pas encore fini à l'issue de l'épreuve n. Evaluer sa limite quand n tend vers l'infini.

3.14. Déduire de la question précédente la probabilité q_n pour que le jeu se termine à l'issue de l'épreuve n.

3.15. Calculer $p\left(B_n\right)$. Montrer que sa limite quand n tend vers l'infini vaut $\frac{1}{7}$. Interpréter cette limite.

3.16. Calculer également $p\left(L_n\right)$ et sa limite.

On admet que $p\left(M_n\right) \to \frac{25}{112}$.

3.17. Quelle est la probabilité que le jeu se termine sans vainqueur ?
