DS 10 Corrigé

Exo 1. **Q1.** $u_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ $\frac{1}{2} < 1$ donc c'est une série de Riemann divergente

(on a $u_n > \frac{1}{n}$, donc $\sum u_n$ diverge car $\sum \frac{1}{n}$ diverge)

Q2. $0 \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge

On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc par télescopage

$\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$, donc $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1}$

Q3. posons $u_n = \frac{n^2 2^n}{n!} \geqslant 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 2^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^2 2^n} = \frac{(n+1)2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc APUCR $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2} < 1$ donc par le critère de D'Alembert, $\underline{\sum u_n \text{ converge.}}$ Pour calculer sa somme on va se ramener à des séries exponentielles: $e^x = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$

Si $n \geqslant 2$, on a $u_n = \frac{n 2^n}{(n-1)!} = \frac{2^n}{(n-1)!} + \frac{2^n}{(n-2)!}$, donc

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = 2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{N} \frac{2^n}{(n-2)!} = 2 + 2\sum_{n=1}^{N-1} \frac{2^n}{n!} + 4\sum_{n=0}^{N-2} \frac{2^n}{n!}$$

donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 2 + 2(e^2 - 1) + 4e^2 = \boxed{6e^2}$

Q4. si $u_n = \frac{n^2+n-1}{n!}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2+n-1}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^2+n} = (n+1)\frac{n^2+n-1}{(n+1)^2+n}$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où APUCR $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2} < 1$ et $\sum u_n$ SATP,

donc par le critère de d'Alembert, $\underline{\sum u_n \text{ converge.}}$

Somme: on a $\frac{n^2+n-1}{n!} = \frac{n(n-1)+2n-1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$ si $n \geqslant 2$

donc $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} + \sum\limits_{n=2}^{N} \frac{2}{(n-1)!} - \sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{n!}$

donc $\sum_{n=0}^{N} u_n = -1+1+\sum_{n=0}^{N-2}\frac{1}{n!}+2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n!}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n!}$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n = e+2(e-1)-(e-1-1)=\boxed{2e}$

Exo2 Q5. soit $v_n=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}$, la fonction $\sqrt{\cdot}$ est croissante donc $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\int_{k-1}^{k}\sqrt{t}\,dt \le \sqrt{k}\le\int_k^{k+1}\sqrt{t}\,dt$

d'où $\int_0^n \sqrt{t}\,dt \le \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \le \int_1^{n+1}\sqrt{t}\,dt$

donc $\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}\le v_n\le \frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\sim\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$

donc $\frac{v_n}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ et $v_n\sim\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$

ainsi $u_n\sim\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}-\alpha}$, $\sum u_n$ est une SATP, par comparaison avec une série de Riemann, on en déduit $\sum u_n$ converge ssi $\alpha-\frac{3}{2}>1$, i.e. $\boxed{\alpha>\frac{5}{2} \iff \sum u_n \text{ converge}}$

Q6. soit $u_n=\ln\cos\frac{1}{n}$. Pour $n\geq 1$, $\cos\frac{1}{n}>0$ donc u_n est bien définie, et $u_n<0$. Etudions $v_n=-u_n$, c'est une SATP. On a $v_n=-\ln(\cos\frac{1}{n})=-\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$
$=-\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\sim\frac{1}{2n^2}$ donc $\sum v_n$ converge, et donc $\boxed{\sum u_n\text{ converge}}$

Q7. soit $u_n=(n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n}}$ on a $u_n\geq 0$, donc une SATP

$u_n=e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)}-e^{\frac{1}{n}\ln n}=e^{\frac{1}{n}(\ln n+\ln(1+\frac{1}{n}))}-e^{\frac{1}{n}\ln n}$

$=e^{\frac{1}{n}\ln n}\left(e^{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))}-1\right)=e^{\frac{1}{n}\ln n}\left(e^{\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})}-1\right)$

$=e^{\frac{1}{n}\ln n}\left(1+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)=\underbrace{e^{\frac{1}{n}\ln n}}_{\to 1}\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

donc $u_n\sim\frac{1}{n^2}$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

Exo 3. Q8. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\,\frac{\overbrace{(n-(n-1))}^{1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$$= \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$$

$$= \frac{(n-1)-n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)^2} = \frac{-1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)^2}$$

donc $a_n < 0$ et $-a_n \sim \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ donc $\sum(-a_n)$ conv.

donc $\sum a_n$ converge, et en vertu de la relation série $\Leftrightarrow$ suite, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ converge}}$

Problème I

1) il s'agit de compter des succès d'une expérience répétée : la probabilité suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3,p)$ d'où $\boxed{P(k \text{ Piles}) = \binom{3}{k} p^k q^{3-k}}$

2) a) on dispose de 7 boules, on en tire k, et on compte les noires :

prenons Ω = l'ensemble des parties à k éléments de l'ensemble des 7 boules

Card $\Omega = \binom{7}{k}$ et sa probabilité est uniforme.

Si on a ℓ noires parmi les k boules et $k-\ell$ blanches, alors il y a $\binom{3}{\ell}$ choix pour les ℓ noires

et $\binom{4}{k-\ell}$ ——— $k-\ell$ blanches

d'où $\boxed{P(\ell \text{ noires parmi les } k \text{ tirées}) = \frac{\binom{3}{\ell}\binom{4}{k-\ell}}{\binom{7}{k}}}$

on a bien $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \frac{\binom{3}{\ell}\binom{4}{k-\ell}}{\binom{7}{k}} = \frac{1}{\binom{7}{k}} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{3}{\ell}\binom{4}{k-\ell}$

$= \dfrac{\binom{7}{k}}{\binom{7}{k}}$ par la formule de Vandermonde.

$\underline{\underline{= 1}}$

b) notons N_ℓ : "on a ℓ noires"

et T_k : "on a tiré k boules"

alors comme $\{\text{"}k \text{ Piles"}\}_{k=0..3}$ est un système complet,

on a la formule des probabilités totales :

$$\boxed{P(N_\ell) = \sum_{k=0}^{3} P(N_\ell | T_k) P(T_k) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\binom{3}{\ell}\binom{4}{k-\ell}}{\binom{7}{k}} \binom{3}{k} p^k q^{3-k}}$$

3) par le théorème de Bayes :

$$\boxed{P(T_0 | N_0) = \frac{P(N_0 | T_0)\, P(T_0)}{P(N_0)}}$$

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{0}}{\binom{7}{0}} \times \binom{3}{0} q^3 \frac{1}{P(N_0)} = \frac{q^3}{P(N_0)}$$

où $P(N_0) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\binom{4}{k}\binom{3}{k}}{\binom{7}{k}} p^k q^{3-k}$ ... sans intérêt...

Problème 2

3.1. Exprimer à l'aide de ces évènements : "Bart manque son tir et Lisa ou Milhouse réussissent le leur".

$\boxed{\text{"Bart manque son tir et Lisa ou Milhouse réussissent le leur"} = M_B \cap (R_L \cup R_M)}$.

3.2. Calculer la probabilité de cet évènement.

On a $p(R_L \cup R_M) = p(R_L) + p(R_M) - p(R_L \cap R_M) = p(R_L) + p(R_M) - p(R_L)p(R_M) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$. Comme M_B est indépendant de cet évènement, on a $p(M_B \cap (R_L \cup R_M)) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{6}\right)$, i.e. $\boxed{p(M_B \cap (R_L \cup R_M)) = \frac{2}{9}}$.

3.3. Calculer également la probabilité de l'évènement "Bart réussit son tir et Lisa ou Milhouse réussissent le leur".

De la même façon (facteur 2/3 et non 1/3), $\boxed{p(\text{"Bart réussit son tir et Lisa ou Milhouse réussissent le leur"}) = \frac{4}{9}}$.

3.4. Que vaut $p(BL_n)$?

Il est impossible qu'il ne reste que B et L après n étapes : lors de l'élimination hypothétique de M, ni B ni L n'aurait en effet visé M d'après le protocole. Donc $\boxed{p(BL_n) = 0}$.

3.5. Déterminer $p(BLM_n)$.

L'événement BLM_n correspond au fait que les 3 tireurs ont raté n fois consécutivement. Par indépendance des essais, on a donc $\boxed{p(BLM_n) = \left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{9^n}}$.

Détermination de probabilités conditionnelles

Donner sans justifier longuement la valeur des probabilités conditionnelles suivantes :

3.6. $p_{BLM_n}(LM_{n+1})$

On a $p_{BLM_n}\left(LM_{n+1}\right)=\frac{2}{9}$ (question 1.2)

3.7. $p_{BLM_n}\left(M_{n+1}\right)$

On a $p_{BLM_n}\left(M_{n+1}\right)=\frac{4}{9}$ (question 1.3)

3.8. $p_{BLM_n}\left(B_{n+1}\right)$

On a $p_{BLM_n}\left(B_{n+1}\right)=0$ (B ne peut descendre ses deux adversaires en même temps)

3.9. $p_{BLM_n}\left(BM_{n+1}\right)$

On a $p_{BLM_n}\left(BM_{n+1}\right)=\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ (seul B réussit)

3.10. $p_{BLM_n}\left(L_{n+1}\right)$

On a $p_{BLM_n}\left(L_{n+1}\right)=0$ (personne ne tire sur ce pauvre M)

Probabilités de victoire

3.11. Justifier que $BM_n=\bigcup_{k=0}^{n-1} BLM_k\cap BM_{k+1}\cap..\cap BM_n$. En déduire une expression de $p\left(BM_n\right)$.

On a $\boxed{BM_n=\bigcup_{k=0}^{n-1} BLM_k\cap BM_{k+1}\cap..\cap BM_n}$ (on partitionne suivant le tour (k) auquel Lisa est éliminée, Milhouse ne pouvant être éliminé en premier).

$$p\left(BM_n\right)=p\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} BLM_1\cap..\cap BLM_k\cap BM_{k+1}\cap..\cap BM_n\right)=\sum_{k=0}^{n-1} p\left(BLM_k\cap BM_{k+1}\cap..\cap BM_n\right)\quad\text{(union disjointe)}$$

$$p\left(BM_n\right)=\sum_{k=0}^{n-1} p\left(BLM_k\right)p(BM_{k+1}|ABC_k)p\left(BM_{k+2}|BM_{k+1}\right)..p\left(BM_n|BM_{n-1}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^k\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{9^k}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}$$

$$p\left(BM_n\right)=\frac{1}{9^n}\sum_{k=0}^{n-1}2^{n-k}=\frac{1}{9^n}\sum_{j=1}^{n}2^j=\frac{2}{9^n}\frac{2^n-1}{2-1}=\frac{2}{9^n}\left(2^n-1\right)\text{ et finalement }\boxed{p\left(BM_n\right)=\frac{2}{9^n}\left(2^n-1\right).}$$

On s'est servi pour faire ce calcul de la formule des probabilités composées :
$p(E_1\cap..\cap E_n)=p(E_1)p(E_2|E_1)..p(E_n|E_1\cap..\cap E_{n-1})$ *et du fait que, pour ce cas précis, chaque probabilité (conditionnelle) est en fait conditionnée par le seul état précédent ! (ce qui allège l'écriture)*

3.12. Calculer de même $p\left(LM_n\right)$.

De même, $p\left(LM_n\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^k\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}=\frac{2}{3^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}$ et $\boxed{p\left(LM_n\right)=\frac{3^n-1}{9^n}.}$

3.13. Calculer la probabilité e_n pour que le jeu ne soit pas encore fini à l'issue de l'épreuve n. Evaluer sa limite quand n tend vers l'infini.

Le combat n'est pas fini après le n-ème tour si et seulement s'il reste au moins 2 joueurs. Ainsi la probabilité recherchée est $e_n=p\left(BLM_n\right)+p\left(BL_n\right)+p\left(BM_n\right)+p\left(LM_n\right)$. Finalement, $e_n=\frac{1}{9^n}+0+\frac{2}{9^n}\left(2^n-1\right)+\frac{3^n-1}{9^n}$, i.e.

$\boxed{e_n=\frac{2^{n+1}+3^n-2}{9^n}\text{, qui tend vers 0.}}$

3.14. Déduire de la question précédente la probabilité q_n pour que le jeu se termine à l'issue de l'épreuve n.

On remarque que $e_{n-1} = e_n + q_n$ (si ce n'est pas fini après $n-1$ tours, c'est que ça se termine juste après ou (exclusif) que ce n'est pas fini après n tours). Donc : $q_n = e_{n-1} - e_n = \dfrac{9(2^n + 3^{n-1} - 2) - 2^{n+1} - 3^n + 2}{9^n}$, i.e.

$\boxed{q_n = \dfrac{7.2^n + 2.3^n - 16}{9^n}}$.

3.15. Calculer $p(B_n)$. Montrer que sa limite quand n tend vers l'infini vaut $\dfrac{1}{7}$. Interpréter cette limite.

On raisonne un peu comme au 3.11 : $p(B_n) = p\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} BM_k \cap B_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2(2^k - 1)}{9^k}\dfrac{2}{3}\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{9}\left(\dfrac{2}{9}\dfrac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1-\frac{2}{9}} - \dfrac{1}{9}\dfrac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}\right)$.

On obtient $\boxed{p(B_n) = \dfrac{1}{7} - \dfrac{8}{63}\left(\dfrac{2}{9}\right)^n + \dfrac{1}{9^{n+1}}}$.

On voit immédiatement que $p(B_n) \to \dfrac{1}{7}$. $\boxed{\text{La probabilité que Bart finisse par l'emporter vaut } \dfrac{1}{7}}$.

3.16. Calculer également $p(L_n)$ et sa limite.

De même $p(L_n) = p\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} LM_k \cap L_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{3^k - 1}{9^k}\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}$ i.e. $\boxed{p(L_n) = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2.3^n} + \dfrac{3}{8.9^n} \text{ tend vers } \dfrac{1}{8}}$.

On admet que $\boxed{p(M_n) \to \dfrac{25}{112}}$.

3.17. Quelle est la probabilité que le jeu se termine sans vainqueur ?

$\boxed{\text{La probabilité qu'il n'y ait pas de gagnant vaut } \dfrac{57}{112}}$: en effet la somme des quatre probabilités (pas de gagnant, victoire de l'un des trois) vaut 1 car $e_n \to 0$ (ce qui signifie que la probabilité que le jeu s'éternise est nulle).