Mines sup 2001 : épreuve commune

PROBLEME 1

Partie 1

1. $\forall t > 0,\ g_a(t) = e^{a \ln t}$.
   Si $a > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} a\ln(t) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{t\to 0} g_a(t) = 0$.
   Si $a = 0$ alors $\forall t > 0,\ g_a(t) = 1$ et donc $\lim\limits_{t\to 0} g_a(t) = 1$.
   Ainsi, dans tous les cas, g_a a une limite finie en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $g_a(0) = 0$ pour $a > 0$, ou $g_0(0) = 1$.

   Soit $a \geqslant 1$. Sur $]0;+\infty[$ g_a est de classe C^1 et $\forall t > 0,\ g'_a(t) = \dfrac{a}{t}t^a = at^{a-1} = ag_{a-1}(t)$.
   Or $a \geqslant 1$ et donc g'_a a une limite finie en 0 (voir étude de g_a).
   Ainsi $\begin{cases} g_a & \text{est continue sur } [0;+\infty[\\ g_a & \text{est de classe } C^1 \text{ sur }]0;+\infty[. \\ g'_a & \text{a une limite finie en } 0 \end{cases}$
   Alors, par application du théorème du prolongement C^1, g_a est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$ et $g'_a = ag_{a-1}$.

2. $t \in [0;1] \Longrightarrow 1-t \in [0;1]$, donc $t \to g_b(1-t)$ est continue sur $[0;1]$ comme composée de fonctions continues. Alors $I(a,b)$ est l'intégrale au sens de Riemann de la fonction $t \to g_a(t)g_b(1-t)$ continue sur $[0;1]$.

   Posons $u = 1-t$. Alors $I(a,b) = \int_1^0 g_a(1-u)g_b(u)(-du) = I(b,a)$.

3. $I(a+1,b) = \int_0^1 g_{a+1}(t)g_b(t)dt$, avec g_{a+1} et g_{b+1} de classe C^1 sur $[0;1]$. Intégrons alors par parties :
   $u(t) = t^{a+1} \Longrightarrow du = (a+1)t^a dt$.
   $dv = (1-t)^b dt$, on prend $v = -\dfrac{1}{b+1}(1-t)^{b+1}$.
   alors $I(a+1,b) = \left[-\dfrac{1}{b+1}t^{a+1}(1-t)^{b+1}\right]_0^1 + \dfrac{a+1}{b+1}\int_0^1 t^a(1-t)^{b+1}dt$.
   $a+1$ et $b+1$ sont supérieurs à 1, on déduit $g_{a+1}(0) = g_{b+1}(0) = 0$
   Ainsi $I(a+1,b) = \dfrac{a+1}{b+1}I(a,b+1)$

$$\boxed{\frac{I(a+1,b)}{a+1} = \frac{I(a,b+1)}{b+1}}.$$

4. $I(a,0) = \int_0^1 t^a dt = \dfrac{1}{a+1}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$ la formule A.3. s'écrit : $I(a,n) = \dfrac{n}{a+1}I(a+1,n-1)$.
   Alors, en écrivant successivement cette formule de $n = 1$ jusqu'à n, on obtient :
   $I(a,n) = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)..(a+n)}I(a+n,0) = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n+1)}$.

5. Pour p et q entiers naturels,
   $I(p,q) = \dfrac{q!}{(p+1)(p+2)...(p+q+1)} = \dfrac{p!}{p!}\dfrac{q!}{(p+1)..(p+q+1)} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

6. Posons $u = \sin^2\theta$; alors $du = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$ et $(\cos\theta)^{2q} = (\cos^2\theta)^q = (1-u)^q$.
Donc $J(p,q) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 u^p(1-u)^q du = \dfrac{1}{2}I(p,q)$.

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{2q+1}d\theta = \frac{1}{2}.\frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$$

Partie B

1. f_a est définie pour x tel que $1 - \dfrac{a}{x} > 0$ i.e. pour x tel que $\dfrac{x-a}{x} > 0$.
Donc f_a est définie sur $]-\infty;0[\cup]a;+\infty[$

2. Posons $\varphi(x) = \ln x - \ln(x-a) - \dfrac{a}{x} = \ln\left(\dfrac{x}{x-a}\right) - \dfrac{a}{x}$.
Pour $x > a$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{a}{x^2} = \dfrac{x(x-a) - x^2 + a(x-a)}{x^2(x-a)} = -\dfrac{a^2}{x^2(x-a)} < 0$.
Donc φ décroît strictement sur $]a;+\infty[$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-a} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{x} = 0$ conduisent à $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
Des variations de φ et de sa limite en $+\infty$ on conclut $\forall x > a,\ \varphi(x) \geqslant 0$, i.e. $\ln(x) - \ln(x-a) \geqslant \dfrac{x}{a}$.

Reprenons la même démarche avec $\psi : x \to \ln x - \ln(x-a) - \dfrac{a}{x-a} = \ln\left(\dfrac{x}{x-a}\right) - \dfrac{a}{x-a}$.
Pour $x > a$, $\psi'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{a}{(x-a)^2} = \dfrac{a^2}{x(x-a)^2} > 0$.
Donc ψ croît strictement sur $]a;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$ (même démonstration que pour φ).
ψ croît et a pour limite 0 en $+\infty$, donc $\forall x > a, \psi(x) \leqslant 0$ i.e. $\ln(x) - \ln(x-a) \leqslant \dfrac{a}{x-a}$.

3. f_a est C^∞ sur $]a;+\infty[$, et pour $x > a$, $f_a(x) = x(\ln(x-a) - \ln x)$.
Alors $f_a'(x) = \ln(x-a) - \ln x + x\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x}\right) = \ln(x-a) - \ln(x) + \dfrac{a}{x-a}$.
L'inégalité de B.2. permet de conclure : $\forall x > a,\ f_a'(x) \geqslant 0$, c'est à dire f_a croît sur $]a;+\infty[$.
Limite en a : $\lim\limits_{t\to 0} \ln t = -\infty \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to a} f_a(x) = -\infty}$.
Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{a}{x}$ tend vers 0. Donc $\ln\left(1 - \dfrac{a}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{x}$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = -a}$.
Les droites d'équations $x = a$ et $y = -a$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_a$.
On en déduit le tableau de variations :

x	a		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$	
$f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-a$

4.

5. $y_n = \exp(f_a(n))$. La fonction f_a croît de $]a;+\infty[$ sur $]-\infty;-a[$, et exp est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc $\exp\circ f_a$ croît sur $]a;+\infty[$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est croissante}}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} f_a(n) = -a \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = e^{-a}}$.

Partie C

1. Soit $h : u \to \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n u^x$. h est continue sur $[0;n]$ car h est la produit de la fonction polynôme $u \to \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n$ par la fonction g_x étudiée dans la partie A. Donc $F_n(x)$ est une intégrale de Riemann.
Posons alors $t=\dfrac{u}{n}$, $dt=\dfrac{du}{n}$, et $F_n(x)=\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n (nt)^x n dt = n^{x+1}\int_0^1 (1-t)^n t^x dt = n^{x+1} I(x,n)$.

2. D'aprés la question B.5. pour $u>0$, $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant \left(1-\dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1}$. Ce résultat est clairement vrai pour $u=0$.
Or la fonction $u \to \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n u^x$ est positive sur $[0;n+1]$. alors
$F_n(x) \leqslant \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x du \leqslant \int_0^{n+1} \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x du$
Ainsi, pour x fixé, $\boxed{F_n(x) \leqslant F_{n+1}(x)}$.

3. $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} u^{x+2}e^{-u}=0$ (étude comparée des exponentielles et fonctions puissances).
Donc $\exists U>0$, tq $u>U \Longrightarrow e^{-u}u^{x+2}\leqslant 1$ (prendre $\varepsilon=1$ dans la définition de la limite nulle en $+\infty$).
Ainsi $\exists U>0,\ \forall u\in\mathbb{R}^+,\ u\geqslant U \Longrightarrow e^{-u}\leqslant \dfrac{1}{u^{x+2}}$.

4. Pour $0<u<n$, $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{u}{n}\right)\right)$.
Or $n\ln\left(1-\dfrac{u}{n}\right) = n(\ln(n-u)-\ln(u)) \leqslant -\dfrac{u}{n}.n$ (voir inégalité de B.2.).
Donc $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant e^{-u}$. Remarquons que cette inégalité reste vraie pour $u=n$ et pour $u=0$.
Alors $F_n(x)\leqslant \displaystyle\int_0^n e^{-u}u^x du.$
* Pour $n\geqslant U$,
$$\begin{aligned} F_n(x) &\leqslant \int_0^U e^{-u}u^x du + \int_U^n \frac{1}{u^{x+2}}u^x du \leqslant \int_0^U e^{-u}u^x du + \int_U^n \frac{1}{u^2}du \\ &\leqslant \int_0^U e^{-u}u^x du + \left(\frac{1}{U}-\frac{1}{n}\right) \leqslant \int_0^U e^{-u}u^x du + \frac{1}{U} \end{aligned}$$
* Pour $n<U, F_n(x)=\displaystyle\int_0^n e^{-u}u^x dx < \int_0^U e^{-u}u^x du \leqslant \int_0^U e^{-u}u^x du + \frac{1}{U}$
donc, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ F_n(x)\leqslant \displaystyle\int_0^U e^{-u}u^x du + \frac{1}{U}}$.

5. Remarquons que U ne dépend pas de n (voir C.3.a.)
Donc pour x fixé, la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par la constante $\displaystyle\int_0^U e^{-u}u^x du + \frac{1}{U}$.
Or cette suite est croissante (C.2.). Cette suite croissante et majorée converge.

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

$$\begin{array}{rcll} F_n(x+1) & = & n^{x+2} I(x+1,n) & \text{(C.1.)} \\ & = & n^{x+2} \dfrac{x+1}{n+1} I(x,n+1) & \text{(A.3.)} \\ & = & (x+1)\dfrac{n^{x+2}}{(n+1)^{x+2}}(n+1)^{x+1} I(x,n+1) & \\ & = & (x+1)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{x+2} F_{n+1}(x) & \text{(C.1.)} \end{array}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{x+2} = 1$. Alors en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\boxed{F(x+1) = (x+1)F(x)}$.
Alors, pour k entier naturel, $F(k) = k!F(0)$. Il reste donc à calculer $F(0)$.
Mais $F_n(0) = nI(0,n) = n.\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{n}{n+1}$. Donc $F(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0) = 1$.
donc $\boxed{\text{Pour } k \text{ entier naturel, } F(k) = k!}$

PROBLEME 2

Partie A

1.

$$\begin{array}{rcl} \forall (s,t)\in\mathbb{R}^2,\ E(s)E(t) & = & (I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2)(I + sA + \dfrac{s^2}{2}A) \\ & = & I + (s+t)A + (\dfrac{s^2}{2} + st + \dfrac{t^2}{2})A^2 + (\dfrac{st^2}{2} + \dfrac{ts^2}{2})A^3 + \dfrac{s^2t^2}{4}A^4 \end{array}$$

A est nilpotente d'indice 3, donc $A^3 = 0$, d'où $A^4 = A.A^3 = 0$.
Donc $E(s)E(t) = A + (s+t)A + \dfrac{(s+t)^2}{2}A^2 = E(s+t)$.

2. Par récurrence on montre alors que $((E(t)^n)) = E(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. $E(0) = I$. Donc $E(t)E(-t) = E(0) = I$.
La matrice $E(t)$ est donc inversible d'inverse $E(-t)$. Donc pour tout réel t, $E(t) \in GL_p(\mathbb{R})$.

4. Soient $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ des réels tels que $\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0$.
Multiplions cette égalité par A^2. On obtient $\alpha A^2 + \beta.0 + \gamma.0 = 0$ et donc $\alpha = 0$.
En multipliant alors l'égalité par A, on déduit $\beta = 0$ et donc $\gamma A^2 = 0$ avec $A^2 \neq 0$. Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
La famille (I, A, A^2) est libre.

5. Aux questions $A.1.$ et $A.3$ on a montré que E est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(GL_p(\mathbb{R}))$.
Pour montrer que E est injective, on va chercher son noyau $\mathrm{Ker}(E)$.
$t \in \mathrm{Ker}(E) \iff E(t) = I \iff I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2 = I \iff tA + \dfrac{t^2}{2}A^2 = 0$.
Or la famille (I, A, A^2) est libre ; on déduit alors $t = 0$ i.e. $\mathrm{Ker}(E) = \{0\}$.
L'application E est donc injective de $\mathbb{R}$ vers $GL_p(\mathbb{R})$.

6. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t+\dfrac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie B

1. - Dans $\mathcal{B}_0$ la matrice de $f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

     Soit $u = (x, y)$. $u \in F \iff \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x - 3y = 0$. On reconnaît l'équation, dans le plan, d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\vec{u} = (3, 1)$.
   - Dans $\mathcal{B}_0$ la matrice de $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est $A - I = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

     Soit $v = (x, y)$. $v \in G \iff \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x - 2y = 0$. On reconnaît, là encore l'équation d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\vec{v} = (2, 1)$.
   - Montrons que F et G sont supplémentaires.

     $t \in F \cap G \iff \begin{cases} (f - 2\mathrm{id})(t) = 0 \\ (f - \mathrm{id})(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(t) = 2t \\ f(t) = t \end{cases} \Longrightarrow t = 0$. Donc $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$. Or $\dim(F) + \dim(G) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Ceci achève de prouver que F et G sont supplémentaires.

2. $\vec{u} \in F$ donc $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$. $\vec{v} \in G$ donc $f(\vec{v}) = \vec{v}$. Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, et D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   La formule de changement de base pour les endomorphismes se traduit, ici, par $D = P^{-1}AP$ ou encore $PDP^{-1} = A$ (on a multiplié l'égalité précédente à gauche par P et à droite par P^{-1}).
   $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. - Par récurrence, on prouve que pour $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   - $A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PD^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D...DP^{-1}$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Ainsi $A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 6 - 6.2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2.2^n \end{pmatrix}$.

Partie C

1. La fonction exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)}(0) = 1$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$ et I le segment de bornes 0 et t (attention t peut être négatif). On sait que la fonction exp est croissante sur I.
   Donc $\forall u \in I$, $\exp^{(n+1)}(u) \leqslant \mathrm{Max}(1, e^t)$ noté M_t. Alors l'inégalité de Taylor Lagrange, appliquée à la fonction exp s'écrit :
   $$\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant M_t \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$$
   Or on sait (comparaison des fonctions puissances et des factorielles) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. De plus M_t ne dépend pas de n. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} M_t \dfrac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right) = e^t}$.

2. $a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(3.2^k - 2) = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
   $b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(6 - 6.2^k) = -6\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 6\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
   $c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(2^k - 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
   $d_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(3 - 2.2^k) = -2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

3. En utilisant le résultat de C.1. appliqué au réel $2t$ on a : $\lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$.
   Alors : $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$, $\quad b(t) = -6e^{2t} + 6e^t$, $\quad c(t) = e^{2t} - e^t$, $\quad d(t) = -2e^{2t} + 3e^t$.
   Ainsi $E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$.

4. $E(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. donc $Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $Q^2 = Q$, $R^2 = R$, $RQ = QR = 0$ (calcul matriciel).
   $Q^2 = Q \Longrightarrow q$ est une projection.
   $R^2 = R \Longrightarrow r$ est une projection.
   Remarquons que $Q = A - I$ et donc $\mathrm{Ker}(q) = G$.
   $R = -A + 2I$ et donc $\mathrm{Ker}(r) = F$.
   $q(u) = u \iff (f - \mathrm{id})(u) = u \iff (f - 2\mathrm{id})(u) = 0 \iff u \in F$. Donc q est la projection sur F de direction G.
   $r(u) = u \iff (-f + 2\mathrm{id})(u) = u \iff (f - \mathrm{id})(u) = 0 \iff u \in G$. Donc r est la projection sur G de direction F.

6. •
   $$\begin{aligned} E(s)E(t) &= \left(e^{2s}Q + e^sR\right)\left(e^{2t}Q + e^tR\right) \\ &= e^{2(s+t)}Q^2 + e^{2s+t}QR + e^{s+2t}RQ + e^{s+t}R^2 \qquad \text{avec } QR = RQ = 0 \text{ et } Q^2 = Q,\ R^2 = R \\ &= e^{2(s+t)}Q + e^{s+t}R \\ &= E(s+t) \end{aligned}$$

   - Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $(E(t)^n) = E(nt)$, $E(0) = I$.
     D'où, $E(-t)E(t) = E(0) = I$ et donc $(E(t))^{-1} = E(-t)$.
   - $t \in \mathrm{Ker}(E) \iff E(t) = I \iff \begin{cases} 3e^{2t} - 2e^t = 1 \\ -6e^{2t} + 6e^t = 0 \\ e^{2t} - e^t = 0 \\ -2e^{2t} + 3e^t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} e^t = e^{2t} \\ e^t = 1 \end{cases} \iff t = 0.$

     Donc E est injective.