PCSI 2

2015-2016

DL18 corrigé

1

Q1) produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Q2) P_n est un polynôme de degré $2n$ et $P_n(x) = \frac{1}{n!} b^n x^{2n} + \cdots$

en développant, d'où $P_n^{(2n)}(x) = 2n \times (2n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times \frac{1}{n!} b^n = \frac{(2n)!}{n!} b^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$

d'où $\boxed{P_n^{(2n)}(0) = P_n^{(2n)}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(2n)!}{n!} b^n}$

Q3) si $p > 2n$, $P_n^{(p)} = 0$ donc $\boxed{P_n^{(p)}(0) = P_n^{(p)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0}$

Q4) $p < n$: alors x^{n-p} est en facteur dans $P_n^{(p)}(x)$, ainsi que $(bx-a)^{n-p}$

donc $\boxed{P_n^{(p)}(0) = P_n^{(p)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0}$

Q5) $f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ et $g^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)\, b^k (bx-a)^{n-k}$ si $k \leq n$ et zéro sinon

donc

si $k < n$, $f^{(k)}(0) = 0$ $\quad g^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} b^k (-a)^{n-k}$

$f^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-k}$ $\quad g^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$

si $k = n$: $f^{(n)}(0) = n!$ $\quad g^{(n)}(0) = n!\, b^n$

$f^{(n)}\left(\frac{a}{b}\right) = n!$ $\quad g^{(n)}\left(\frac{a}{b}\right) = n!\, b^n$

si $k > n$: $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = f^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = g^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$

Q6) $n \leq p \leq 2n-1$

on a $(fg)^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(p-k)}(x)$ donc si $x = 0$ on a $f^{(k)}(x) = 0$ sauf si $k = n$ par Q5

et si $x = \frac{a}{b}$ on a $g^{(p-k)}(x) = 0$ sauf pour $p-k = n$, i.e. $k = p-n$ ce qui est toujours possible car $n \leq p$ et $p-n \leq n-1$

Q7) par Q6, et Q5, on a

$$(fg)^{(p)}(0) = \binom{p}{n} f^{(n)}(0)\, g^{(p-n)}(0) = \binom{p}{n} n!\, \frac{n!}{(2n-p)!} b^{p-n} (-a)^{2n-p}$$

car $p-n < n$

$$(fg)^{(p)}\left(\frac{a}{b}\right) = \binom{p}{p-n} f^{(p-n)}\left(\frac{a}{b}\right) g^{(n)}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{n!}{(2n-p)!}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-p} n!\, b^n \binom{p}{n}$$

or $\binom{p}{n}\frac{(n!)^2}{(2n-p)!} = \frac{p!\, n!\, n!}{(p-n)!\, n!\, (2n-p)!} = \frac{p!\, n!}{(p-n)!(2n-p)!} = p! \binom{n}{p-n}$

ou encore :

$$fg^{(p)}(0) = p! \binom{n}{p-n} b^{p-n} (-a)^{2n-p}$$

$$(fg)^{(p)}\left(\frac{a}{b}\right) = p! \binom{n}{p-n} b^{p-n} a^{2n-p}$$

Q8) si $p=2n$; comme $\frac{(2n)!}{n!} = 2n\times(2n-2)\times\cdots\times(2n-n+1) \in \mathbb{N}$ et $b^n \in \mathbb{N}$

on a $P_n^{(p)}(0)$ et $P_n^{(p)}(\frac{a}{b}) \in \mathbb{N}$ par Q2)

si $p>2n$, par Q3) on conclut.

si $p<n$ par Q4) idem

si $n\leq p\leq 2n-1$, par Q7) on a $b^{p-n} \in \mathbb{N}$ car $p-n\geq 0$ et $b\in\mathbb{N}$

on a $(-a)^{2n-p} \in \mathbb{Z}$ car $2n-p\geq 0$ et $a\in\mathbb{N}$

donc $P_n^{(p)}(0) = \frac{1}{n!}(fg)^{(p)}(0) = \frac{p!}{n!}\binom{n}{p-n} b^{p-n} a^{2n-p} \in \mathbb{Z}$

car $\frac{p!}{n!} = p(p-2)\cdots(p-n+1)$ puisque $p\geq n$,

et $\binom{n}{p-n} \in \mathbb{N}$.

idem pour $P_n^{(p)}(\frac{a}{b})$.

Conclusion : $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ P_n^{(p)}(0) \text{ et } P_n^{(p)}(\frac{a}{b}) \text{ sont entiers}}$

$\boxed{2.}$ Q9)

$$I_n = \int_0^\pi \underset{u}{P_n(t)}\underset{v'}{\sin t}\,dt = \left[-P_n(t)\cos t\right]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(t)\cos t\,dt$$ par IPP (u et v ont $\mathcal{C}^1$)

$$= -\left[P_n(t)\cos t\right]_0^\pi + \left[P_n'(t)\sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi P_n''(t)\sin t\,dt$$ par IPP ($u=P_n'$)

$$= \text{———} - \left(\left[-P_n''(t)\cos t\right]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'''(t)\cos t\,dt\right)$$ par IPP ...

et enfin $I_n = -\left[P_n(t)\cos t\right]_0^\pi + \left[P_n'(t)\sin t\right]_0^\pi + \left[P_n''(t)\cos t\right]_0^\pi - \left(\left[P_n'''(t)\sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi P_n^{(4)}(t)\sin t\,dt\right)$ par IPP

etc jusqu'à obtenir $P_n^{(2n+2)}$ qui est nul (voir Q3).

$$\text{d'où } I_n = -\left[P_n(t)\cos t\right]_0^\pi + \left[P_n''(t)\cos t\right]_0^\pi - [\quad] + \cdots + (-1)^{n+1}\left[P_n^{(2n)}(t)\cos t\right]_0^\pi$$
$$+ \left[P_n'(t)\sin t\right]_0^\pi - \left[P_n^{(3)}\sin t\right]_0^\pi + [\quad] + \cdots + (-1)^{n-1}\left[P_n^{(2n-1)}\sin t\right]_0^\pi$$

donc $$\boxed{I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\left[P_n^{(2k)}(t)\cos t\right]_0^\pi + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[P_n^{(2k+1)}(t)\sin t\right]_0^\pi}$$

Q10) on a $\cos\pi = -1$, $\cos 0 = 1$, $\sin\pi = \sin 0 = 0$, or $\pi = \frac{a}{b}$

donc, par Q8, $P_n^{(2k)}(0)$, $P_n^{(2k+2)}(0)$, $P_n^{(2k)}(\pi)$, $P_n^{(2k+2)}(\pi) \in \mathbb{Z}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

et donc $I_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Q11) la fonction $t \mapsto P_n(t)\sin t$ est positive sur $[0,\pi]$, car $bx-a \geq 0$ si $x \in [0, \frac{a}{b}]$ (car $\pi = \frac{a}{b}$), or elle est continue (Q1),

donc, par le théorème de l'intégrale nulle, si $I_n = 0$,

alors $\forall t \in [0,\pi]$, $P_n(t)\sin t = 0$,

or $P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\left(b\frac{\pi}{2}-a\right)^n \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \underbrace{\left(b\frac{a}{2b}-a\right)}_{= -\frac{a}{2}}{}^n \neq 0$ car $a \neq 0$

Donc $\boxed{I_n \neq 0}$

Q12) erreur typographique dans l'énoncé! la valeur absolue a sauté : $M = \sup\left\{ |x(bx-a)| \;/\; x \in [0, \frac{a}{b}] \right\}$

l'étude des variations de $h : h(x) = x(bx-a)$ montre

$h'(x) = 2bx - a = 0 \iff x = \frac{a}{2b}$ et alors on a

$h \leq 0$ et minimale pour $x = \frac{a}{2b}$, donc $M = \left|\frac{a}{2b}\left(b\frac{a}{2b}-a\right)\right|$

et $\boxed{M = \frac{a^2}{4b}}$

Q13) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|I_n| \leq \int_0^\pi \frac{1}{n!}|x(bx-a)|^n|\sin t|\,dt \leq \int_0^\pi \frac{1}{n!} M^n\,dt = \pi\frac{M^n}{n!}$ CQFD.

Q14) on a $\frac{M^n}{n!} \to 0$ quand $n \to +\infty$ par croissance comparée,

donc $\boxed{|I_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ or par Q10 et Q11, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |I_n| \geq 1}$

ce qui nous donne une splendide $\boxed{\text{contradiction}}$

et donc $\boxed{\pi \text{ n'est pas rationnel.}}$