Devoir libre n°13

pour lundi 27 février 2017

Problème : polynômes et fonctions

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

On rapelle que $g^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la fonction g et que, par convention, $g^{(0)} = g$

Q1 Justifier que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

Q2 Calculer avec soin $g'(x)$, $g''(x)$, $g^{(3)}(x)$ et $g^{(4)}(x)$

Q3 Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{(x^2+1)^{n+1}} P_n(x)$

et vérifier que $P_{n+1}(X) = 2(n+1)X.P_n(X) - \left(X^2+1\right) P_n'(X)$ (égalité $R1$)

On admet que cette suite est unique

Q4 Préciser P_0 et calculer P_1 , P_2, P_3 et P_4 à l'aide de la relation précédente $(R1)$
Que devez-vous vérifier ?

Q5 Montrer que P_n est de la parité de n

Q6 Déterminer le monôme dominant de P_n . On démontrera avec soin le résultat

Q7 Enoncer la formule de dérivation de Leibniz à l'ordre $n+2$

Q8 À partir de la relation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x^2+1\right) g(x) = 1$ démontrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(X) - 2(n+2)XP_{n+1}(X) + (n+1)(n+2)\left(X^2+1\right) P_n(X) = 0$ (égalité $R2$)

Q9 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = P_{2n}(0)$
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire u_n en fonction de n

Q10 Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}'(X) = (n+1)(n+2)P_n(X)$ (égalité $R3$)

Q11 Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(X^2+1\right) P_n''(X) - 2nX.P_n'(X) + n(n+1)P_n(X) = 0$ (égalité $R4$)

Dans la suite, on se propose de montrer que $P_n(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$
et de déterminer les racines de $P_n(X)$ pour $n \geq 1$

Q12 Montrer que $P_n(X)$ est scindé pour $n \in \{1,2,3,4\}$ et en donner la factorisation sur $\mathbb{R}$

Q13 En remarquant que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \ g(x) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-i} - \dfrac{1}{x+i}\right)$ où i est le complexe de carré -1

montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; P_n(X) = \dfrac{n!}{2i}\left((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right)$

Q14 Retrouver à partir de cette expression le monôme dominant de $P_n(X)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q15 Résoudre $P_n(z) = 0$ pour $z \in \mathbb{C}$ et vérifier que cette équation admet n racines réelles distinctes

Q16 En déduire la factorisation de $P_n(X)$ sur $\mathbb{R}$

Q17 Préciser la somme des racines de P_n

Q18 Préciser le produit des racines de P_n selon la parité de n