DL13 Corrigé

PROBLEME : POLYNOMES et FONCTIONS

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

On rapelle que $g^{(n)}$ désigne la dérivée $n-ième$ de la fonction g et que , par convention , $g^{(0)} = g$

Q-1 $x \mapsto x^2+1$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas donc $\boxed{g \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

Q-2 Pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{g'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}}$,

$$g''(x) = -2(x^2+1)^{-2} + (-2x)(-2(2x))(x^2+1)^{-3} = \frac{-2(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^3} = \boxed{\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = g''(x)}$$

$$g^{(3)}(x) = (12x)(x^2+1)^{-3} + (6x^2-2)(-3(2x))(x^2+1)^{-4} = \frac{(12x)(x^2+1)-6x(6x^2-2)}{(x^2+1)^4} : -24x^3+24x :$$

soit $\boxed{g^{(3)}(x) = \dfrac{-24x^3+24x}{(x^2+1)^4} = 24\dfrac{-x^3+x}{(x^2+1)^4}}$

et : $g^{(4)}(x) = 24\Big((-3x^2+1)(x^2+1)^{-4} + (-x^3+x)(-4(2x))\Big)(x^2+1)^{-5}$

$= 24\dfrac{(-3x^2+1)(x^2+1)-8x(-x^3+x)}{(x^2+1)^5}$ donc $\boxed{g^{(4)}(x) = \dfrac{24(5x^4-10x^2+1)}{(x^2+1)^5}}$:

Q-3 • Pour $n \in \{0,1,2,3,4\}$, les calculs précédents montrent que :

$$\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{(x^2+1)^{n+1}} P_n(x)$$

• Supposons le résultat vrai à un rang $n \in \mathbb{N}$, fixé . On a alors :$\forall x \in \mathbb{R}$

$$g^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{d}{dx}\left(P_n(x)(x^2+1)^{-n-1}\right) = (-1)^n\left(P_n'(x)(x^2+1)^{-n-1} - (n+1)2x(x^2+1)^{-n-2}P_n(x)\right)$$

$$= (-1)^{n+1}(x^2+1)^{-n-2}\Big(2x(n+1)P_n(x) - (x^2+1)P_n'(x)\Big) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+2}}P_{n+1}(x)$$

avec : $P_{n+1}(X) = 2(n+1)X.P_n(X) - (X^2+1)\,P_n'(X)$ et $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$

⋆Donc par récurrence , on a montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{(x^2+1)^{n+1}}P_n(x)}$$

avec $\boxed{P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(X) = 2(n+1)X.P_n(X) - (X^2+1)\,P_n'(X) \qquad (R1)}$

•On admet que cette suite est unique

Q-4 On a : $\boxed{P_0(X) = 1}$

On a : $P_1(X) = 2XP_0(X) - (X^2+1)\,P_0'(X) = 2X$ donc $\boxed{P_1(X) = 2X}$

puis : $P_2(X) = 4X.P_1(X) - (X^2+1)\,P_1'(X) = 8X^2 - 2(X^2+1)$ donc $\boxed{P_2(X) = 6X^2-2}$

puis $P_3(X) = 6X.P_2(X) - (X^2+1)\,P_2'(X) = 6X(6X^2-2) - 12X(X^2+1)$ donc $\boxed{P_3(X) = 24(X^3-X)}$

puis $P_4(X) = 8X.P_3(X) - (X^2+1)\,P_3'(X) = 8X \times 24(X^3-X) - 24(X^2+1)(3X^2-1)$

donc $\boxed{P_4(X) = 120X^4 - 240X^2 + 24 = 24(5X^4-10X^2+1)}$

• On vérifie que ces résultats sont cohérents avec les calculs de la question ***Q-1-b-***

Q-5 Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$

• C'est vrai pour $n = 0$ (et même pour $n \in \{0,1,2,3,4\}$

• Supposons le résultat vrai à un rang $n \in \mathbb{N}$, fixé . On a alors :

$$P_{n+1}(-X) = 2(n+1)(-X).P_n(-X) - \left((-X)^2+1\right)\,P_n'(-X) = -2(n+1)X(-1)^nP_n(X) - (X^2+1)\,P_n'(-X)$$

Or $P_n(-X) = (-1)^nP_n(X)$ donc $-P_n'(-X) = (-1)^nP_n'(X)$

donc : $P_{n+1}(-X) = -2(n+1)X(-1)^nP_n(X) + (X^2+1)\,(-1)^nP_n'(-X)$

$$= (-1)^{n+1}\Big(2(n+1)X.P_n(X) - (X^2+1)P_n'(X)\Big) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(X)$$

⋆ Par récurrence , on a donc montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(-X) = (-1)^nP_n(X)}$

autrement dit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \text{ est de la parité de } n}$

Q-6 On notera $dom(P)$ le monôme dominant d'un polynôme non nul P

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; dom(P_n) = (n+1)!X^n$

- C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ (et même pour $n \in \{0,1,2,3,4\}$

- Supposons le résultat vrai à un rang $n \in \mathbb{N}^*$, fixé . On a alors :

$dom\big(2(n+1)X.P_n(X)\big) = 2(n+1)((n+1)!)X^{n+1}$

et $dom\Big(-(X^2+1)P_n'(X)\Big) = -n(n+1)!X^{n+1}$

donc $dom\big(2(n+1)X.P_n(X)\big) + dom\Big(-(X^2+1)P_n'(X)\Big) = (2n+2-n)((n+1)!)X^{n+1} = ((n+2)!)X^{n+1}$

$\star$ Par récurrence , on a donc montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;\; dom(P_n) = (n+1)!X^n}$

Q-7 Soient g et h deux fonctions $n+2$ fois dérivables sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$

Alors $h \times g$ est $n+2$ fois dérivable sur I et on a :

$$\boxed{(h\times g)^{(n+2)} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} h^{(k)} \times g^{(n+2-k)}}$$

Q-8 Soit $h : x \mapsto x^2+1$. h et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

avec : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = x^2+1 \;\;, h^{(1)}(x) = 2x \;\;, \;\; h^{(2)}(x) = 2$ et $h^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geq 3$

Donc d'après la formule de Leibniz : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$(h\times g)^{(n+2)}(x) = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} h^{(k)}(x) \times g^{(n+2-k)}(x)$$

$$= \binom{n+2}{0} h^{(0)}(x)\times g^{(n+2)}(x) + \binom{n+2}{1} h^{(1)}(x)\times g^{(n+1)}(x) + \binom{n+2}{2} h^{(2)}(x)\times g^{(n)}(x)$$

$$= (x^2+1)g^{(n+2)}(x) + (n+2)(2x)g^{(n+1)}(x) + \frac{(n+2)(n+1)}{2}\times 2g^{(n)}(x)$$

$$= (x^2+1)\frac{(-1)^{n+2}}{(x^2+1)^{n+3}}P_{n+2}(x) + 2(n+2)x\frac{(-1)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+2}}P_{n+1}(x) + (n+2)(n+1)\frac{(-1)^n}{(x^2+1)^{n+1}}P_n(x)$$

$$= \frac{(-1)^n}{(x^2+1)^{n+2}}\Big(P_{n+2}(x) - 2(n+2)xP_{n+1}(x) + (n+2)(n+1)(x^2+1)P_n(x)\Big)$$

Or : $(h\times g)^{(n+2)}(x) = 0$

Donc , la fonction polynôme étant nulle sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad P_{n+2}(X) - 2(n+2)X.P_{n+1}(X) + (n+1)(n+2)(X^2+1)P_n(X) = 0 \qquad (R2)}$$

Q-9 On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = P_{2n}(0)$

D'après la relation $(R2)$, il vient :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P_{2n+2}(X) - 2(2n+2)X.P_{2n+1}(X) + (2n+1)(2n+2)(X^2+1)P_{2n}(X)$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} + (2n+1)(2n+2)u_n = 0$

Soit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -(2n+1)(2n+2)u_n}$

- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n(2n)!$

On a : $u_0 = P_0(0) = 1 = (-1)^0(0)!$

Si $u_n = (-1)^n(2n)!$ alors $u_{n+1} = -(2n+1)(2n+2)(-1)^n(2n)! = (-1)^{n+1}(2n+2)!$

Donc , par récurrence , on a montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n(2n)!}$

Q-10 D'après les relations $(R1)$ et $(R2)$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$P_{n+1}(X) = 2(n+1)X.P_n(X) - (X^2+1)\, P_n'(X)$

et :

$P_{n+2}(X) = 2(n+2)X.P_{n+1}(X) - (n+1)(n+2)(X^2+1)P_n(X)$

D'où d'après $(R1)$:

$P_{n+2}(X) = 2(n+2)X.P_n(X) - (X^2+1)\, P'_{n+1}(X)$

Donc : $2(n+2)X.P_{n+1}(X) - (n+1)(n+2)(X^2+1)P_n(X) = 2(n+2)X.P_n(X) - (X^2+1)\, P'_{n+1}(X)$

Donc : $(n+1)(n+2)(X^2+1)P_n(X) = (X^2+1)\, P'_{n+1}(X)$

Donc , puisque l'anneau $\mathbb{R}[X]$ est intègre :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad P'_{n+1}(X) = (n+1)(n+2)P_n(X) \qquad (R3)}$$

Q.11 Dérivons la relation $(R1)$; il vient : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P'_{n+1}(X) = 2(n+1).P_n(X) + 2(n+1)X.P'_n(X) - 2X\,P'_n(X) - (X^2+1)\,P''_n(X)$$

$$= 2(n+1).P_n(X) + 2nX.P'_n(X) - (X^2+1)\,P''_n(X)$$

D'après $(R3)$, on en déduit :

$$2(n+1).P_n(X) + 2nX.P'_n(X) - (X^2+1)\,P''_n(X) = (n+1)(n+2)P_n(X)$$

Donc $0 = (X^2+1)\,P''_n(X) - 2nX.P'_n(X) + n(n+1)P_n(X)$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad (X^2+1)\,P''_n(X) - 2nX.P'_n(X) + n(n+1)P_n(X) = 0 \quad (R4)}$

Dans cette question , on se propose de montrer que $P_n(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et de déterminer les racines de $P_n(X)$ pour $n \geq 1$

Q.12 On a : $\boxed{P_1(X) = 2X}$

On a : $\boxed{P_2(X) = 6X^2 - 2 = 6\left(X - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

On a : $\boxed{P_3(X) = 24(X^3 - X) = 24X(X-1)(X+1)}$

On a : $P_4(X) = 24(5X^4 - 10X^2 + 1)$

Les solutions de $5z^2 - 10z + 1 = 0$ sont $z_1 = \dfrac{10 - \sqrt{80}}{10} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $z_2 = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Donc les racines de P_4 sont $-\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$, $-\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$, $\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$ et $\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$

Donc $\boxed{P_4(X) = 120\left(X + \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}\right)\left(X + \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}\right)\left(X - \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}\right)\left(X - \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}\right)}$

Q.13 On a : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{x+i-(x-i)}{(x+i)(x-i)}\right) = \frac{1}{x^2+1} = g(x)$$

Par ailleurs : $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x+z}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+z)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate)

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right) = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left(\frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x-i)^{n+1}(x+i)^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2i}\,\frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(X) = \frac{n!}{2i}\left((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right)}$ par uniité de la suite $(P_n)_n$

Q-14 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme de newton , on a :

$$(X+i)^{n+1}-(X-i)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(i^k-(-i)^k\right)X^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}i^k\left(1-(-1)^k\right)X^{n+1-k}$$

Pour $k=0$, on obtient $\binom{n+1}{k}i^k\left(1-(-1)^k\right)X^{n+1-k}=0$

Pour $k=1$, on obtient $\binom{n+1}{k}i^k\left(1-(-1)^k\right)X^{n+1-k}=2i(n+1)X^n$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad dom(P_n)=\frac{n!}{2i}\times 2i(n+1)X^n=(n+1)!X^n}$

Q-15 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :

$P_n(z)=0 \Leftrightarrow (z-i)^{n+1}=(z+i)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \exists k \in \{0,\dots,n\} \quad z-i=(z+i)\exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \{0,\dots,n\} \quad \left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)-1\right)z=-i\left(1+\exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \{0,\dots,n\} \quad \exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\left(2i\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)z=-i\exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \{1,\dots,n\} \quad z=\dfrac{-2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}$ (car si $k=0$ on a : $0=-2i$!!!)

Donc $P_n(z)=0 \Leftrightarrow \exists k \in \{1,\dots,n\} \quad z=\dfrac{-2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}=-\cot an\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

Or la fonction $\cot an$ est une bijection de $]0,\pi[$ vers $\mathbb{R}$ et la suite $\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)_{1\le k\le n}$ est une suite strictement croissante d'éléments de $]0,\pi[$ donc

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n \text{ admet } n \text{ racines réelles distinctes } z_k=-\cot an\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \text{ pour } k \in \{1,\dots,n\}}$

Q-16 On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n=(n+1)!\prod_{k=1}^{n}\left(X+\cot an\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)}$

NB : Si $k \in \{1,\dots,n\}$ alors $n+1-k \in \{1,\dots,n\}$ et $\cot an\left(\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}\right)=-\cot an\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n=(n+1)!\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cot an\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)}$

Q-17 On a : $P_n(X)=\frac{n!}{2i}\left((X+i)^{n+1}-(X-i)^{n+1}\right)=(n+1)!X^n+0X^{n-1}+\dots$

Donc $\boxed{\text{La somme des racines de } P_n \text{ vaut } 0}$ car cette somme vaut $-\frac{0}{(n+1)}$

Q-18 • $\boxed{\text{Si } n \text{ est impair , le produit des racines de } P_n \text{ vaut } 0}$ car 0 est une racine puisuqe P est impair

• Si n est pair avec $n=2m$ On a , $x_1,\dots,x_n$ désignent les racines de P_n :

$$P_{2m}(0)=u_m=(-1)^m(2m)!=(n+1)!\prod_{k=1}^{n}\left(0-\cot an\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)=(n+1)!(-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k$$

Donc : $\boxed{\prod_{k=1}^{n}x_k=\frac{(-1)^m n!}{(n+1)!}=\frac{(-1)^m}{2m+1} \quad \text{si } n=2m}$