

# DM1

Instructions de rédaction:

- écrire lisiblement et réserver une marge à gauche, utiliser des copies doubles
- tous les calculs intermédiaires doivent apparaître sur la copie
- les raisonnements doivent être détaillés, chaque déduction doit être justifiée
- un résultat non justifié sera ignoré
- **encadrer** les résultats ainsi que les conclusions des démonstrations.

## Exercice 1

(3584)

Équation diophantienne

Déterminer tous les couples  $(n, p)$  d'entiers naturels non nuls tels que  $n^p = p^n$  et  $n \neq p$ .

## Exercice 2

(3585)

Maximum et valeur absolue

Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels. Démontrer que

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Note: pour se débarrasser des valeurs absolues, le plus simple est de faire deux cas, selon que l'expression dans la valeur absolue est positive ou bien négative.

## Exercice 3

(3586)

Egalités et inégalités avec des valeurs absolues

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1.  $|x + 3| = 5$

2.  $|x + 3| \leq 5$

3.  $|x + 2| > 7$

4.  $|2x - 4| \leq |x + 2|$

## Exercice 4

(3587)

Inégalités avec des valeurs absolues

Soient  $x$  et  $y$  des réels. Démontrer les inégalités suivantes :

1.  $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$

2.  $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$

3.  $\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}$ .

## Exercice 5

Quels sont les réels  $x$  qui vérifient  $\sqrt{x(x - 3)} = \sqrt{2x - 4}$ ?