DS10 Corrigé

Exercice 1

Q1 on a $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$

$\sqrt{1-x} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$

donc $\boxed{g(x) = 2-\frac{1}{4}x^2+o(x^3)}$

Q2 soit g une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ sur $\mathbb{R}$ (qui existe car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$)

on a $f(x) = g(x^2)-g(x)$ donc, comme g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f aussi et admet des DL à tout ordre.

on a $f'(x) = 2x\,g'(x^2)-g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$: il suffit d'un DL_3 de f'

On a $\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1-\frac{1}{2}u+\frac{3}{4}u^2+o(u^2)$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

et $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1+o(x^3)$ donc $f'(x) = 2x-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

en intégrant (prop du cours) on obtient $f(x) = f(0)-x+x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$

or $f(0)=0$ donc $\boxed{f(x) = -x+x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)}$

Q3 on a $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

donc $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1-\frac{x}{2}+o(x)} = e \times e^{-\frac{x}{2}+o(x)}$ or $e^u = 1+u+o(u)$

donc $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)$ ainsi $(1+x)^{\frac{1}{x}}-e = -\frac{e}{2}x+o(x)$

d'où $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = -\frac{e}{2}+o(1)$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = -\frac{e}{2}}$

Exercice 2

Q1 Leibniz : si f et g sont $\mathcal{C}^n$, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Q2 g est $\mathcal{C}^\infty$ car P et $x \mapsto e^{2x}$ le sont.

Q3 on a $g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}(x)\, 2^{n-k} e^{2x}$ car $\left(x \mapsto e^{2x}\right)^{(k)} = x \mapsto 2^k e^{2x}$

or $P'(x) = 2x+4$ $P''(x) = 2$ et $P^{(k)} = 0$ si $k \geq 3$

donc $g^{(n)}(x) = \binom{n}{0}P(x)2^n e^{2x} + \binom{n}{1}(2x+4)2^{n-1}e^{2x} + \binom{n}{2}2\,2^{n-2}e^{2x}$

$= \left[(x^2+4x-1)2^n + n(2x+4)2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-1}\right]e^{2x}$

et $\boxed{g^{(n)}(x) = 2^{n-2}\left[4x^2+(16+4n)x+n^2+7n-4\right]e^{2x}}$

Exercice 3

Q1. 1 est racine évidente, divisons P par X−1 :

$$\begin{array}{l|l} 5X^4-36X^3+62X^2-36X+5 & X-1 \\ \hline -5X^4+5X^3 & 5X^3-31X^2+31X-5 \\ \quad -31X^3+62X^2-36X+5 & \\ \quad +31X^3-31X^2 & \\ \qquad 31X^2-36X+5 & \\ \qquad -31X^2+31X & \\ \qquad\quad -5X+5 & \\ \qquad\quad +5X-5 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

d'où $P=(X-1)\underbrace{(5X^3-31X^2+31X-5)}_{Q}$

on a $Q=5(X^3-1)-31(X^2-X)=5(X-1)(X^2+X+1)-31(X-1)X$

$=(X-1)(5X^2+5X+5-31X)=(X-1)(5X^2-26X+5)$

$\frac{26}{5}=5+\frac{1}{5}$ et $1=5\times\frac{1}{5}$ donc 5 et $\frac{1}{5}$ sont racines

de $5X^2-26X+5=5(X^2-\frac{26}{5}X+1)$

ainsi $\boxed{P=5(X-1)(X-1)(X-5)(X-\frac{1}{5})\text{, ses racines sont } 1, 5 \text{ et } \frac{1}{5}}$

racine double

Q 2) on a $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

ainsi $2xy=i^2-1$ d'où $xy=\frac{-2}{2}=-1$

donc les solutions du système sont les racines de $P=X^2-iX-1$

$\Delta=(-i)^2+4=3$ racines : $\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$

d'où $\boxed{\{x,y\}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right\}}$

Q 3) a) $\boxed{P_1=1+X}$ $P_2=1+X+\frac{1}{2}X(X+1)=1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X}{2}$

$=\frac{1}{2}(X^2+3X+2)=\boxed{\frac{1}{2}(X+1)(X+2)=P_2}$

b) Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\dots(X+n)$

par récurrence sur n :

$\underline{n=1}$: $P_1 = (X+1)$ ok

$\underline{n>1}$: supposons $P_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}(X+1)\dots(X+n-1)$ par hyp. de réc.

on remarque que $P_n = P_{n-1} + \frac{1}{n!}X(X+1)\dots(X+n-1)$

donc $P_n = \frac{1}{(n-1)!}(X+1)\dots(X+n-1) + \frac{1}{n!}X(X+1)\dots(X+n-1)$

$= (X+1)\dots(X+n-1)\left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{X}{n!}\right]$

$= \text{——— " ———} \quad \frac{n+X}{n!}$

$= (X+1)\dots(X+n-1)(X+n)\frac{1}{n!}$ CQFD

c) d'après b) $\boxed{\text{les racines de } P_n \text{ sont } -1, -2, \dots, -n}$

$\boxed{\text{Problème 1}}$

Q22) $\underline{ch^2 z - sh^2 z} = \frac{1}{4}(e^z + e^{-z})^2 - \frac{1}{4}(e^z - e^{-z})^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2z} + e^{-2z} + 2 - (e^{2z} + e^{-2z} - 2)\right)$

$\underline{= 1}$

Q23) $ch(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$

et $ch\,a\,ch\,b + sh\,a\,sh\,b = \frac{1}{4}(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + \frac{1}{4}(e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})$

$= \frac{1}{4}\left(e^{a+b} + e^{-a-b} + \cancel{e^{-a+b}} + \cancel{e^{a-b}} + e^{a+b} + e^{-a-b} - \cancel{e^{a-b}} - \cancel{e^{-a+b}}\right)$

$= \frac{1}{4}(2e^{a+b} + 2e^{-a-b}) = \underline{ch(a+b)}$ ok

Q24)

$ch(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \boxed{\cos x}$

$sh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \boxed{i \sin x}$

Q25) par récurrence sur n :

$n=0$: $1 = ch(0)$ ok

$n=1$: $ch z = ch(1z)$ ok

soit $n \geq 0$, supposons $T_n(ch z) = ch(nz)$
et $T_{n+1}(ch z) = ch((n+1)z)$

on a $T_{n+2}(ch z) = 2 ch z\, T_{n+1}(ch z) - T_n(ch z)$

$$= 2 ch z\, ch((n+1)z) - ch(nz)$$

$$= \cancel{2}\, \frac{e^z + e^{-z}}{\cancel{2}}\, \frac{e^{(n+1)z} + e^{-(n+1)z}}{2} - ch(nz)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{(n+2)z} + e^{-nz} + e^{nz} + e^{-(n+2)z} \right) - ch(nz)$$

$$= ch((n+2)z) + ch(nz) - ch(nz)$$

$$= ch((n+2)z) \quad \underline{\text{CQFD}}$$

Q26) $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1 \qquad T_3 = 4X^3 - 3X}$

Q27) par récurrence sur n : $n=0$; $\deg T_0 = 0$ ok $n=1$: $\deg T_1 = 1$ ok

$n \geq 0$: $\deg T_{n+2} = 1 + \underbrace{\deg T_{n+1}}_{n+1}$ car on suppose $\deg T_n = n < n+1 = \deg T_{n+1}$

$= n+2$ ok. De même on obtient $\boxed{c_n = 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } c_0 = 1}$

Q28) la famille est échelonnée en degrés, donc libre
or $\dim \mathbb{C}_n[X] = n+1$, il y a $n+1$ polynômes dans la famille $(T_0, \dots, T_n)$ donc $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$

Q29) $X^3 = \frac{1}{4}T_3 + \frac{3}{4}T_1$ donc $\boxed{\text{de coordonnées } \left(0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)}$ dans (T_0, T_1, T_2, T_3)

Q30) par récurrence sur n : vrai pour $n=0$ et $n=1$

$$T_{n+2}(-X) = -2X\,T_{n+1}(-X) - T_n(-X)$$
$$= -2X(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X)$$
$$= (-1)^{n+2}\left(2XT_{n+1}(X) - T_n(X)\right) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(X)$$

d'où $\boxed{T_n \text{ est de la parité de } n}$

Q31) $T_n(1) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

n impair $\Rightarrow T_n(0) = 0$

n pair $\Rightarrow T_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$

par récurrence sur n.

Q32) par Q25, Q24 $\quad T_n(\cos\theta) = T_n(\operatorname{ch} i\theta) = \operatorname{ch}(ni\theta) = \boxed{\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)}$

Q33) $\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$

or $0 < \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \in [\![0, n[\![$

d'où $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n},\ k = 0, \dots, n-1}$

Q34) on a $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ donc $T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = 0 \ \forall k \in [\![0, n[\![$

d'où $\boxed{n \text{ racines distinctes, donc simples : } \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right),\ k = 0, \dots, n-1}$

Q35) par Q34) et Q27) on a

$$\boxed{T_n = c_n \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)}$$

Q36) d'après le cours c'est $(-1)^n \times$ le coef constant de T_n, qui est $T_n(0)$, donc c'est $\boxed{\begin{array}{ll} (-1)^{n+\frac{n}{2}} = (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{array}}$

Problème 2 **Q16)** $x \neq 0$, $1-\frac{a}{x}>0 \Leftrightarrow 1>\frac{a}{x}$

si $x>0$: $1>\frac{a}{x} \Leftrightarrow \underline{x>a}$

si $x<0$: $1>\frac{a}{x} \Leftrightarrow x<a$ or $a>0$ donc c'est vrai car $x<0$.

d'où $\boxed{D_{f_a} =]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[}$

Q17) ln continue sur son ens. de def

$x \mapsto \frac{1}{x}$ ——— "

$x \mapsto x$ ——— "

donc $\boxed{\text{par somme, produit, et composition, } f_a \text{ est continue sur } D_f}$

Q18) appliquons l'égalité des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[x-a, x]$:
en effet ln est continue sur $[x-a,x]$ et dérivable sur $]x-a,x[$ (car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$)

donc $\exists c \in]x-a,x[$ tq $\ln(x)-\ln(x-a) = \ln'(c)\,(x-(x-a))$

$= \frac{1}{c} a$

or $x-a<c<x$

donc $\frac{1}{x}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x-a}$ | donc $\frac{a}{x}<\frac{a}{c}<\frac{a}{x-a}$

$a>0$

et donc $\frac{a}{x}<\ln(x)-\ln(x-a)<\frac{a}{x-a}$

et donc $\boxed{\frac{a}{x} \leq \ln(x)-\ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}}$

Q19) on a $\ln(x)-\ln(x-a) = \ln\frac{x}{x-a} = -\ln\frac{x-a}{x} = -\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)$

$= -\frac{f_a(x)}{x}$

donc $\frac{a}{x} \leq \frac{-f_a(x)}{x} \leq \frac{a}{x-a}$ or $x>0$ si $x \to +\infty$

donc $a \leq -f_a(x) \leq \frac{ax}{x-a}$ or $\frac{ax}{x-a} \to a$

donc, par encadrement $-f_a(x) \to a$

et donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -a}$

Q20) $x \to a^+ \Rightarrow \frac{a}{x} \to 1^- \Rightarrow 1-\frac{a}{x} \to 0^+ \Rightarrow \ln(1-\frac{a}{x}) \to -\infty$

$a>0$ donc $f(x) \to -\infty$ ainsi $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty}$

$x \to -\infty \Rightarrow \frac{a}{x} \to 0 \Rightarrow \ln(1-\frac{a}{x}) \to 0^-$: forme indéterminée si on multiplie par x...

On cherche un équivalent :

soit $y = \frac{-a}{x}$, $y \to 0$ $\ln(1-\frac{a}{x}) = \ln(1+y) \sim y = \frac{-a}{x}$

donc $f(x) \sim x \times \frac{-a}{x} = -a \neq 0$

donc $\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = -a}$

Q21) non, car la limite de f en a^+ est infinie (Q20)

Q22) $x \to 0^- \Rightarrow \frac{-a}{x} \to +\infty$: forme ind. pour $f(x)$...

on a, si $x<0$,

$f(x) = x\ln(1-\frac{a}{x}) = x \ln \frac{a-x}{-x} = x\ln(\underbrace{a-x}_{>a>0}) - x\ln(\underbrace{-x}_{>0})$

or $x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc $x\ln(-x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$

on a $\ln(a-x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(a)$ donc $x\cdot\ln(a-x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

donc $\boxed{\lim_{x\to 0^-} f_a(x) = 0}$ $\boxed{\text{on peut donc prolonger } f_a \text{ en } 0 \text{ en posant } f_a(0)=0}$

Q23) f_a est dérivable sur D_f car composée, somme, et produit de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs.

A gauche en 0 : $x \to 0^-$ le taux de variation de f_a est

$$\frac{f_a(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\, x\ln(1-\frac{a}{x}) = \ln(1-\frac{a}{x})$$

on a vu (Q22) que $\ln(1-\frac{a}{x}) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{f_a \text{ n'est pas dérivable à gauche en } 0}$

Q24) $x \in D_f$; $f_a'(x) = \left(x \ln\left(1-\frac{a}{x}\right)\right)' = \ln\left(1-\frac{a}{x}\right) + x\left(\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)\right)'$

$$= \ln\left(1-\frac{a}{x}\right) + x\,\frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)'}{1-\frac{a}{x}} = \ln\left(1-\frac{a}{x}\right) + x\,\frac{\frac{a}{x^2}}{\frac{x-a}{x}}$$

$$= \ln\left(1-\frac{a}{x}\right) + x \times \frac{x}{x-a} \times \frac{a}{x^2} = \ln\left(1-\frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x-a}$$

d'où $\boxed{f_a'(x) = \ln(x-a) - \ln x + \frac{a}{x-a} \text{ si } x > a}$

et $\boxed{f_a'(x) = \ln(a-x) - \ln(-x) + \frac{a}{x-a} \text{ si } x < 0}$

d'après Q18) on a $f_a'(x) \geq 0$ si $x > a$

si $x<0$: on a $f_a''(x) = \left(\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)\right)' - \frac{a}{(x-a)^2} = \frac{a}{x(x-a)} - \frac{a}{(x-a)^2}$

$$= \frac{a}{x-a}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-a}\right) = \frac{a}{x-a}\left(\frac{x-a-x}{x(x-a)}\right)$$

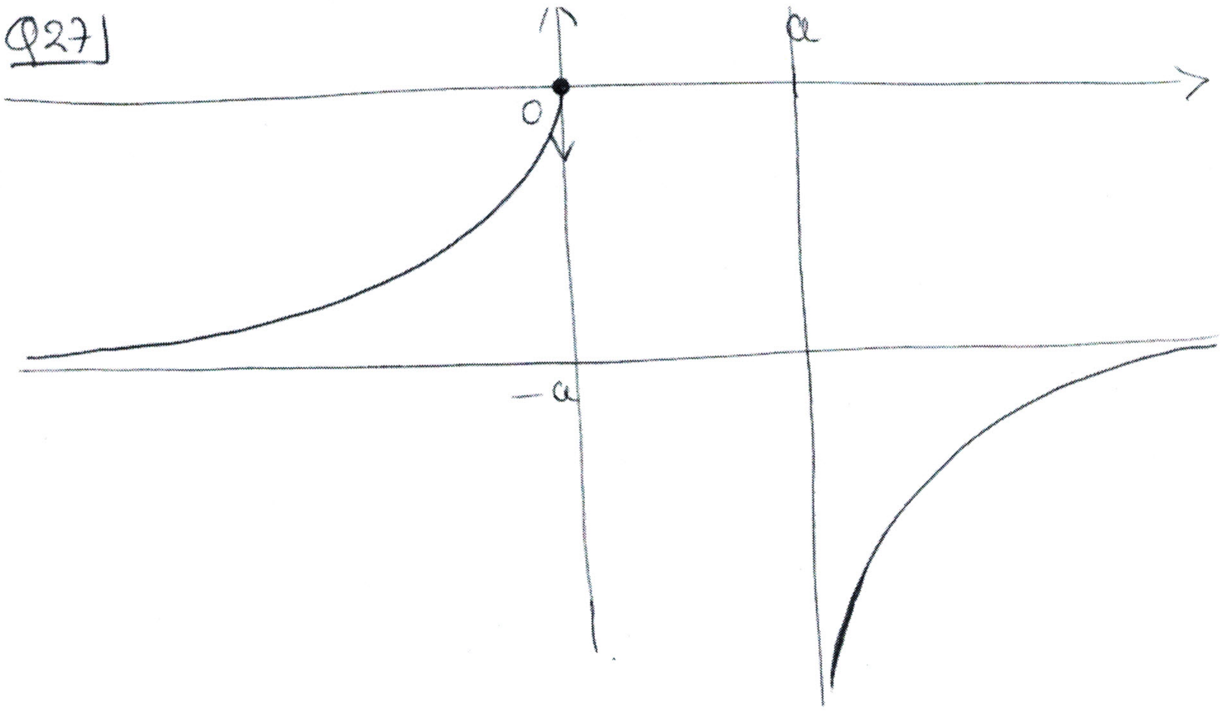
$$= \frac{-a^2}{x(x-a)^2} > 0 \quad \text{or } f_a'(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0,$$

donc $f_a'(x) > 0$ si $x<0$, d'où le tableau

x	$-\infty$	0		a	$+\infty$
$f_a'(x)$	$+$	‖		‖	$+$
$f_a(x)$	$-a \nearrow$	0		‖	$-\infty \nearrow -a$

Q26) au vu du tableau de variations, on a :
la droite d'équation $y = -a$ asymptote à la courbe de f_a en $+\infty$ et $-\infty$, la courbe est dessous en $+\infty$ et dessus en $-\infty$.
la droite d'équation $x = a$ asymptote verticale
et une $\frac{1}{2}$ tangente verticale en 0 (voir Q23)

Q27)



Q28) $D_g = D_f \cup \{0\}$ car f_a prolongée en 0.

Q29) pas de problème sur D_f, car $g_a(x) = x \times f_a(x)$

en 0 : $g_a(x) = x^2 \ln\left(\frac{x-a}{x}\right) = \underbrace{x^2 \underbrace{\ln(a-x)}_{\to \ln a}}_{\to 0} - \underbrace{x^2 \ln(-x)}_{\to 0}$

donc $g_a(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$ donc $g_a(x) \to g_a(0)$ donc continue en 0

Q30) $\frac{g_a(x) - g_a(0)}{x - 0} = x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) = f_a(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$

donc $\boxed{g_a \text{ dérivable à gauche en } 0 \text{ et } g'_a(0) = 0}$

Q31) $g_a(x) = x^2 \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) = x^2\left(\left(\frac{-a}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-a}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{-a}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

$= \underbrace{-ax - \frac{a^2}{2}} - \frac{a^3}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

d'où la droite d'équation $y = -ax - \frac{a^2}{2}$ asymptote à la courbe de g_a en + et −∞,

la courbe est dessous en +∞, et dessus en −∞ (signe de $\frac{-a^3}{3x}$)

Q32