DS3 : corrigé

Exercice 1 **Q1**

(E) est une EDL1, comme $x>0$, on a (E) $\iff y' + \frac{2}{x} y = \frac{\ln x}{x^2}$

posons $a(x) = \frac{2}{x}$, $A(x) = \int a(x)\,dx = 2\ln|x| = 2\ln x$ une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions de l'équation homogène

(EH) $y' + \frac{2}{x} y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda e^{-2\ln x} = \frac{\lambda}{x^2} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre (E), utilisons la méthode de variation de la constante : (λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$)

soit $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x^2}$, donc $y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^2} - 2\frac{\lambda(x)}{x^3}$

y est solution de (E) ssi

$$\frac{\lambda'(x)}{x^2} \underbrace{- \cancel{2\frac{\lambda(x)}{x^3}} + \cancel{\frac{2}{x}\frac{\lambda(x)}{x^2}}}_{\text{ô surprise ! ☺}} = \frac{\ln x}{x^2}$$

donc ssi $\lambda'(x) = \ln x$, donc ssi $\lambda(x) = x\ln x - x + C$, $C \in \mathbb{R}$

d'où $\boxed{\text{les solutions de (E) sur } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions de la forme}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto (x\ln x - x + C)\frac{1}{x^2} \end{array} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}}$$

Q2) EDL2CC équation caractéristique : $r^2 + 5r + 4 = 0$ (EC)

racines -1 et -4

donc les solutions de l'équation homogène sont $y_0 = \lambda e^{-x} + \mu e^{-4x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

avec le principe de superposition on se réduit à chercher y_1 solution de $y'' + 5y' + 4y = \cos x$ et y_2 solution de $y'' + 5y' + 4y = e^{-x}$

On cherche y_1 sous la forme $y_1 = a\cos x + b\sin x$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$y_1' = -a\sin x + b\cos x$, $y_1'' = -a\cos x - b\sin x$

donc $y_1'' + 5y_1' + 4y_1 = (-a + 5b + 4a)\cos x + (-b - 5a + 4b)\sin x$

$= \cos x$ ceci $\forall x \in \mathbb{R}$

avec $x = 0$ et $x = \pi/2$ on obtient $\begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ -5a + 3b = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = \frac{3}{34} \\ b = \frac{5}{34} \end{cases}$

et $y_1 = \frac{1}{34}(3\cos x + 5\sin x)$

-1 étant racine de (EC), simple, on cherche $y_2 = (cx+d)e^{-x}$

donc $y_2' = ce^{-x} - (cx+d)e^{-x} = (-cx+c-d)e^{-x}$

$y_2'' = -ce^{-x} - (-cx+c-d)e^{-x} = (cx-2c+d)e^{-x}$

donc $y_2''+5y_2'+4y_2 = e^{-x}(\cancel{cx}-2c+\cancel{d}-\cancel{5cx}+5c-\cancel{5d}+\cancel{4cx}+\cancel{4d})$
$= e^{-x}$

$\Rightarrow 3c = 1$ donc $c = \frac{1}{3}$ et on est libre de prendre $d=0$ par exemple

d'où $y_2 = \frac{1}{3}xe^{-x}$

Exo2] Q.1] y est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on peut poser $x = e^t$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$, car exp est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. Posons $z(t) = y(e^t)$, alors $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$, donc $z''(t) = xy'(x) + x^2y''(x)$ et $z'(t) = xy'(x)$. Ainsi y solution de (E) ssi

$x^2y'' - 2y = x+1 \Leftrightarrow (z''-z') - 2z = e^t + 1$

$\Leftrightarrow z''-z'-2z = e^t+1$

$\Leftrightarrow z$ solution de (E') $\square$

Q.2] c'est une EDL 2 à coef constants avec second membre.
Résolvons l'éq. homogène (E_h') $z''-z'-2z=0$
d'équation caractéristique $r^2-r-2=0$ (EC)
de racines $\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}$ donc $r_1 = \frac{1+3}{2} = \boxed{2}$ et $r_2 = \frac{1-3}{2} = \boxed{-1}$

donc les sol. de (E_h') sont les $z_h = \lambda e^{2t} + \mu e^{-t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

On utilise le principe de superposition :

pour le second membre 1 : une solution évidente est

$$z_1 = -\frac{1}{2}$$

pour le second membre e^t : c'est un polynôme × exponentiel, 1 n'est pas racine de (EC), on cherche une sol. $z = ae^t$

ainsi $z' = ae^t$, $z'' = ae^t$ et donc $ae^t - ae^t - 2ae^t = e^t$

d'où $a = -\frac{1}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2}e^t$ est solution.

Donc finalement $z_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t$ est solution particulière de (E')

Conclusion : les solutions de (E') sont les $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq

$$\boxed{z(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-t} - \frac{1}{2}(1+e^t), \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

Q3) d'après Q22, $y(x) = z(t)$ et $t = \ln x$ donc les sol de (E) sont

$$y = \lambda e^{2\ln x} + \mu e^{-\ln x} - \frac{1}{2}(1 + e^{\ln x})$$

donc $y = \lambda x^2 + \mu \frac{1}{x} - \frac{1}{2}(1+x)$,

Conclusion ; les solutions de (E) sont les $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

avec $\boxed{y(x) = \lambda x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\mu}{x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

Q.4) avec $y(x) = \lambda x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\mu}{x}$, si $\mu \neq 0$, $y(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \pm\infty$ selon le signe de μ

et avec $\mu = 0$ $y(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\frac{1}{2}$

donc les solutions de (E) ayant une limite en 0^+

sont les $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ avec $\boxed{y(x) = \lambda x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, \lambda \in \mathbb{R}}$

Partie A

Q1 : On a $y(x) = z(\ln x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

donc $y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x)$, $y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)$

donc y solution de (E) $\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)\right) - x \frac{1}{x} z'(\ln x)$

$+ z(\ln x) = x^3 - \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow -z'(t) + z''(t) - z'(t) + z(t) = (e^t)^3 - \frac{1}{e^t}$ car $x = e^t$

$\Leftrightarrow z$ solution de (EL) : $\underline{z'' - 2z' + z = e^{3t} - e^{-t}}$

Q.2 (EL) est une EDL2CC, d'équation caractéristique

(EQ) $r^2 - 2r + 1 = 0 = (r-1)^2$ racine double 1

donc les solutions de l'équation homogène (ELH) $z'' - 2z' + z = 0$

sont de la forme $\underline{z_0(t) = (\lambda t + \mu) e^t, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$.

3 n'est pas racine de (EQ), on cherche $z_1 = a e^{3t}$ pour solution

de $z'' - 2z' + z = e^{3t}$: $z_1' = 3a e^{3t}$, $z_1'' = 9a e^{3t}$

---

donc $9a e^{3t} - 6a e^{3t} + a e^{3t} = e^{3t}$ donc $a = \frac{1}{4}$: $z_1 = \frac{1}{4} e^{3t}$

-1 n'est pas solution de (EQ), on cherche $z_2 = b e^{-t}$ solution

de $z'' - 2z' + z = -e^{-t}$: $z_2' = -b e^{-t}$ $z_2'' = b e^{-t}$

donc $b e^{-t} + 2b e^{-t} + b e^{-t} = -e^{-t}$ donc $b = -\frac{1}{4}$: $z_2 = -\frac{1}{4} e^{-t}$

Ainsi, grâce au principe de superposition, les solutions de (EL) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{z(t) = (\lambda t + \mu) e^t + \frac{1}{4} e^{3t} - \frac{1}{4} e^{-t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Q.3. on a, d'après Q12, y solution de (E) $\Leftrightarrow$ z solution de (EL)

donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = (\lambda \ln x + \mu) e^{\ln x} + \frac{1}{4} e^{3\ln x} - \frac{1}{4} e^{-\ln x}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{y(x) = (\lambda \ln x + \mu) x + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{4x} \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

Partie B **Q4** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $\begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ aussi donc $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ aussi,

$x \mapsto x^2$ aussi ; d'où $f' : x \mapsto f'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi $\boxed{f \text{ est 2 fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$

Q.5. on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \left(x f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\right)' = f\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-1}{x^2}\right) f'\left(\frac{1}{x}\right) + 2x$

or $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f'(x) - x^2}{x}$ donc

$f''(x) = \frac{1}{x} f'(x) - x - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) + \frac{1}{x^2}\right) + 2x$

$= \frac{1}{x} f'(x) - x - \frac{1}{x^2} f(x) - \frac{1}{x^3} + 2x$

donc $f''(x) - \frac{1}{x} f'(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = -\frac{1}{x^3} + x$

et donc $\underline{x^2 f''(x) - x f'(x) + f(x) = x^3 - \frac{1}{x}}$ donc $\boxed{f \text{ vérifie (E)}}$

Q6. toute fonction f vérifiant (P) est solution de (E) par Q 16.

Chercher quelles solutions de (E) vérifient (P) : soit f une sol. de (E)

on a $\begin{cases} f(x) = (\lambda \ln x + \mu) x + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{4x} \\ \forall x > 0 \end{cases}$ pour un λ et un $\mu \in \mathbb{R}$

soit $x > 0$:

on a $f'(x) = \frac{\lambda}{x} x + (\lambda \ln x + \mu) + \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{4x^2} = \underline{\lambda \ln x + \lambda + \mu + \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{4x^2}}$

$$\text{on a } x f\left(\frac{1}{x}\right)+x^2 = x\left(\left(\lambda \ln\left(\frac{1}{x}\right)+\mu\right)\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^3}-\frac{x}{4}\right)+x^2$$

$$= -\lambda \ln x+\mu+\frac{1}{4x^2}-\frac{x^2}{4}+x^2$$

$$= \underline{-\lambda \ln x+\mu+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}}$$

donc f satisfait (P) ssi $\forall x>0$, $\lambda \ln x+\lambda = -\lambda \ln x$

$\Leftrightarrow 2\lambda \ln x+\lambda=0$ prenons $x=1$, et on obtient $\underline{\lambda=0}$, qui convient.

<u>On peut donc conclure :</u> S est l'ensemble des fonctions $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ telles qu'il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in]0,+\infty[$,

$$\boxed{f(x)=\mu x+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}}$$