DS7 corrigé.

Exercice 1

Q1 on a $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta-\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=0, \beta=0=\gamma$

1 donc $\boxed{(u_1,u_2,u_3) \text{ est libre.}}$

Q2 on complète avec les vecteurs de B tant qu'on obtient une famille libre :
avec e1 : on remarque $e_1=u_2-u_3$, donc (u_1,u_2,u_3,e_1) liée.
avec e2 : on a $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3+\delta e_2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha+\delta=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta-\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \delta-\beta=0\\ \gamma=0\\ -2\beta-\gamma=0\end{cases}$

2 $\Rightarrow \gamma=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow \alpha=0, \delta=0$
donc (u_1,u_2,u_3,e_2) est libre, avec 4 vecteurs en dimension 4,
donc $\boxed{(u_1,u_2,u_3,e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$

Q3 on en déduit que (e_2) est une base d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$:
1 $\boxed{H=\mathrm{Vect}(e_2)}$ car $F+H=\mathbb{R}^4=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)+\mathrm{Vect}(e_2)$
et $F\cap H=\{0\}$ car (u_1,u_2,u_3,e_2) libre.

Q4 par la formule de Grassman, on a
$\dim F+G=\dim F+\dim G-\dim F\cap G$
2 or $F+G=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,e_1,e_2)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,e_2)=\mathbb{R}^4$ par Q2
$\dim F=3$ car (u_1,u_2,u_3) libre
$\dim G=2$ car (e_1,e_2) libre
donc $\boxed{\dim F\cap G= 3+2-4=1}$

Q5 on a vu que $e_1=u_2-u_3\in F$ or $e_1\in G$ donc $\boxed{e_1\in F\cap G}$
1 or $\dim F\cap G=1$ (Q2) et $e_1\neq 0$ } donc $\boxed{(e_1) \text{ est une base de } F\cap G}$

Exercice 2

1 **Q6** on a $H_2=\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $H_{-1}=\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ donc $\boxed{\text{ce sont des sev}}$

Q7 pour $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a $u\in H_2 \Leftrightarrow f(u)=2u \Leftrightarrow \begin{cases}5x+6y+6z=2x\\ -3x-4y-3z=2y\\ -z=2z\end{cases}$

2 $\Leftrightarrow \begin{cases}3x+6y+2z=0\\ -3x-6y-3z=0\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=0\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2y\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow u=(-2y,y,0)=y(-2,1,0)$

donc $H_2=\mathrm{Vect}(u_1)$ où $u_1=(-2,1,0)\neq 0$ ainsi $\boxed{(u_1) \text{ est une base de } H_2}$

on a $u\in H_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases}5x+6y+6z=-x\\ -3x-4y-3z=-y\\ -z=-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x+6y+6z=0\\ -3x-3y-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow x+y+z=0$

2 $\Leftrightarrow x=-y-z \Leftrightarrow u=(-y-z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$
donc $H_{-1}=\mathrm{Vect}(u_2,u_3)$ avec $u_2=(-1,1,0)$ et $u_3=(-1,0,1)$
u_2,u_3 ne sont pas colinéaires, donc $\boxed{(u_2,u_3) \text{ est une base de } H_{-1}}$

Q8 on a $u\in H_2\cap H_{-1} \Leftrightarrow f(u)=2u$ et $f(u)=-u$, donc $2u=-u$, donc $3u=0$
donc $u=0$: ainsi $\underline{H_2\cap H_{-1}=\{0\}}$
2 par la formule de Grassman, $\dim H_2+H_{-1}=\dim H_2+\dim H_{-1}-\dim H_2\cap H_{-1}$
$=1+2-0$
$=3$
donc $\underline{H_2+H_{-1}=\mathbb{R}^3}$, on peut conclure que $\boxed{H_2 \text{ et } H_{-1} \text{ sont supplémentaires}}$

Q9 pour $u=u_1+u_2$, $f(u)=f(u_1)+f(u_2)=\boxed{2u_1-u_2=f(u)}$
1 f lin. $u_1\in H_2$, $u_2\in H_{-1}$

Q10 $f^n(u)=f^n(u_1)+f^n(u_2)=2^n u_1+(-1)^n u_2$ par récurrence immédiate.
or $\begin{cases}u=u_1+u_2\\ f(u)=2u_1-u_2\end{cases}$ donc $u_1=\frac{1}{3}(u+f(u))$ (L_1+L_2)
3 et $u_2=\frac{1}{3}(2u-f(u))$ $(2L_1-L_2)$
ainsi $f^n(u)=2^n\frac{1}{3}(u+f(u))+(-1)^n\frac{1}{3}(2u-f(u))$
donc $\boxed{f^n(u)=\frac{1}{3}\left(2^n+2(-1)^n\right)u+\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)f(u)}$

Q11 soit $u\in\mathbb{R}^4$, avec $u=u_1+u_2$ où $u_1\in H_2$ et $u_2\in H_{-1}$
alors $(f-2\mathrm{Id})\circ(f+\mathrm{Id})(u)=(f-2\mathrm{Id})(f(u)+u)$
$=f(f(u))+f(u)-2(f(u)+u)$
2 $=f^2(u)-f(u)-2u$
$=f(2u_1-u_2)-(2u_1-u_2)-2(u_1+u_2)$
$=\cancel{4u_1}+\cancel{u_2}-\cancel{2u_1}+\cancel{u_2}-\cancel{2u_1}-\cancel{2u_2}$
$=0$ d'où $\boxed{(f-2\mathrm{Id})\circ(f+\mathrm{Id})=0}$

1 **Q12** par Q11, on a $(f-2\mathrm{Id})\circ(f+\mathrm{Id})=f^2+f-2f-2\mathrm{Id}=f^2-f-2\mathrm{Id}=0$
Q13 donc $f\circ(f-\mathrm{Id})=2\mathrm{Id}$ donc $f\circ\frac{1}{2}(f-\mathrm{Id})=\mathrm{Id}$
2 de même on montre $\frac{1}{2}(f-\mathrm{Id})=\mathrm{Id}$, donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$, et $\boxed{f^{-1}=\frac{1}{2}(f-\mathrm{Id})}$

Q14 on a $f^{-1}(e_1) = \frac{1}{2}\left(f(e_1) - e_1\right) = \frac{1}{2}\left((5,-3,0) - (1,0,0)\right)$ car $f(e_1)$ est donné par la première colonne de A.

$= \frac{1}{2}(4,-3,0)$

de même $f^{-1}(e_2) = \frac{1}{2}\left((6,-4,0) - (0,1,0)\right) = \frac{1}{2}(6,-5,0)$

$f^{-1}(e_3) = \frac{1}{2}\left((6,-3,-1) - (0,0,1)\right) = \frac{1}{2}(6,-3,-2)$

2

d'où la matrice de f^{-1} dans la base canonique, qui n'est autre que A^{-1} :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Q15 c'est la matrice

$$\boxed{D = \begin{array}{c|ccc|c} & f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & \\ \hline & 2 & 0 & 0 & u_1 \\ & 0 & -1 & 0 & u_2 \\ & 0 & 0 & -1 & u_3 \end{array}}$$

car $f(u_1) = 2u_1$
$f(u_2) = -u_2$
$f(u_3) = -u_3$

2

Exercice 3 :

Q16 montrons que g est linéaire : soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

on a $g(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q - (X+1)(\lambda P' + \mu Q') + X^2(\lambda P'' + \mu Q'')$ car la dérivation est linéaire

$= \lambda(P - (X+1)P' + X^2 P'') + \mu(Q - (X+1)Q' + X^2 Q'')$

$= \lambda g(P) + \mu g(Q)$ □.

ainsi $\boxed{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

Q17 soit $P = a_n X^n + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$

alors $g(P) = a_n X^n + \dots - (X+1)(n a_n X^{n-1} + \dots) + X^2(n(n-1)a_n X^{n-2} + \dots)$

$= (a_n - n a_n + n(n-1)a_n)X^n +$ termes de degré $< n$

$= a_n(1 - n + n^2 - n)X^n + \dots$

$= a_n(n^2 - 2n + 1)X^n + \dots$

$= a_n(n-1)^2 X^n + \dots$

ainsi, si $n \geq 2$, $\deg g(P) = n$

sinon, si $n = 1$, $P = aX + b$, $g(P) = aX + b - (X+1)a = b - a$

si $n = 0$, $P = a$, $g(P) = a = P$
$\neq 0$

donc $\boxed{\deg(g(P)) \leq \deg P}$

Q18 pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg g(P) \leq \deg P \leq n$, donc $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

donc g_n est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, or g est linéaire

donc g_n aussi : $\boxed{g_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

Q19 on a $P \in \operatorname{Ker} g \iff g(P) = 0$

si $\deg P \geq 2$, on a vu (Q17) que $\deg g(P) = n$ donc $g(P) \neq 0$

si $\deg P = 0$, —— // —— $g(P) = P \neq 0$ donc —— // ——

si $\deg P = 1$, —— // —— $g(P) = b - a$, si $P = aX + b$, $a \neq 0$

si $P = 0$, $g(P) = 0$

ainsi $g(P) = 0 \iff P = aX + a$ avec $a \in \mathbb{R}$

d'où $\boxed{\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}(X+1)}$

Q20 on a $\operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Ker} g \cap \mathbb{R}_n[X]$, or $\left(\begin{array}{l} n \geq 1, \\ \deg(X+1) = 1 \end{array} \right)$ donc $\boxed{\operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Vect}(X+1)}$

Q21 par le théorème du rang

on a $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \operatorname{Ker} g_n + \underbrace{\dim \operatorname{Im} g_n}_{= \operatorname{rg} g_n}$

donc $n+1 = 1 + \operatorname{rg} g_n$

donc $\boxed{\operatorname{rg} g_n = n}$

Q22 $g_3(1) = 1$

$g_3(X) = X - (X+1) = -1$

$g_3(X^2) = X^2 - (X+1)2X + 2X^2 = X^2 - \cancel{2X^2} - 2X + \cancel{2X^2} = X^2 - 2X$

$g_3(X^3) = X^3 - (X+1)3X^2 + X^2 6X = X^3 - 3X^3 - 3X^2 + 6X^3 = 4X^3 - 3X^2$

d'où la matrice de g_3 dans la base $B(1, X, X^2, X^3)$:

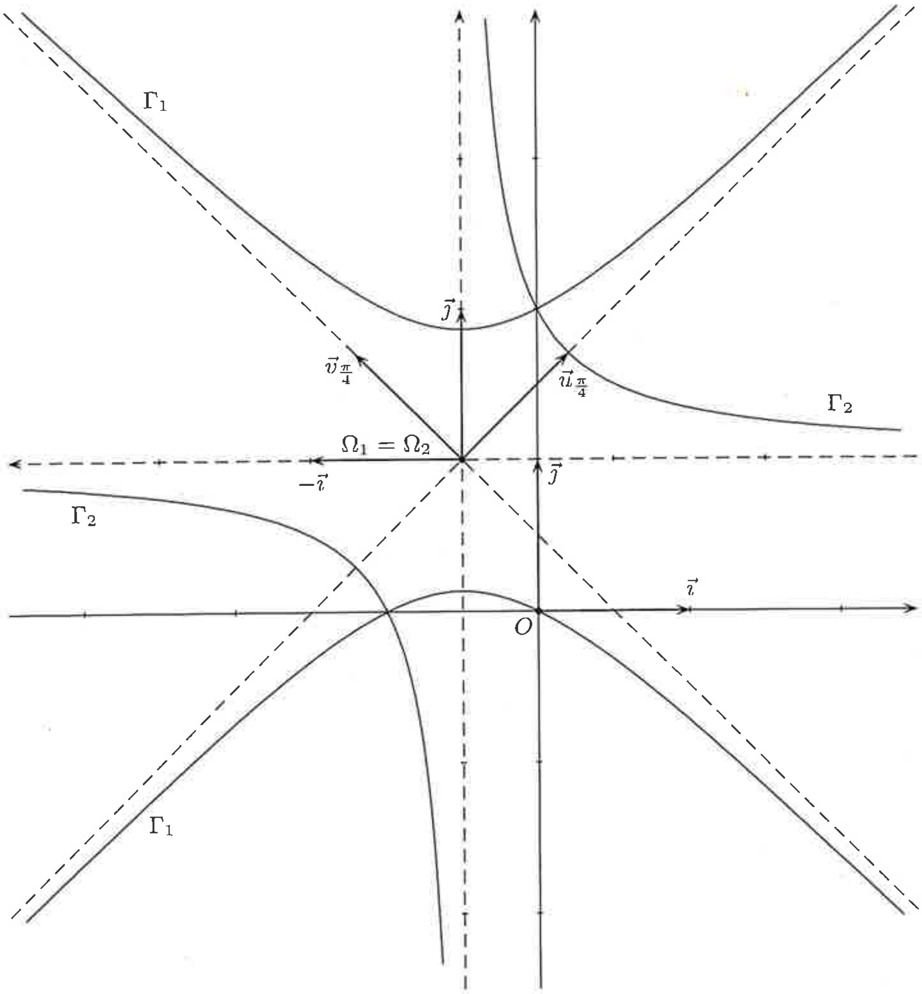
$$\boxed{A = \mathcal{M}_B(g_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Q23 les colonnes de A engendrent $\operatorname{Im} g_3$, mais les 2 premières sont liées, alors que les 3 dernières sont échelonnées en degré, donc libres,

donc $\boxed{(1, X^2 - 2X, 4X^3 - 3X^2) \text{ est une base de } \operatorname{Im} g_3}$

Q24 $\boxed{\text{oui}}$ car $(1, X^2 - 2X, 4X^3 - 3X^2, X+1)$ est échelonnée en degré, donc c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, adaptée à la somme directe $\operatorname{Ker} g_3 \oplus \operatorname{Im} g_3 = \mathbb{R}_3[X]$

© Christophe Bertault



EXERCICE 3

~~2.2 Définition d'une application~~

Q1 ~~18~~ Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Notons (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) les couples de la division euclidienne de $P_1(X^2)$ et $P_2(X^2)$ par T respectivement. Alors par unicité de la division euclidienne, $(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2, \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$ est le couple de la division euclidienne de $(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X^2)$ par T. Il en découle comme voulu que :

2

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + X(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) = \lambda_1 (Q_1 + XR_1) + \lambda_2 (Q_2 + XR_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$

Q2 ~~19~~ Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Nous devons montrer que $f_n(P) = f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

- Par hypothèse $\partial^\circ R < \partial^\circ T = n$, donc $\partial^\circ(XR) = 1 + \partial^\circ R \leqslant n$, de sorte que $XR \in \mathbb{C}_n[X]$.
- Par hypothèse $P \in \mathbb{C}_n[X]$ donc $\partial^\circ P(X^2) = 2\partial^\circ P \leqslant 2n$. Dans ces conditions $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ car :

2

$$\partial^\circ Q = \partial^\circ (QT) - \partial^\circ T = \partial^\circ \big(P(X^2) - R\big) - n \leqslant \max\Big\{\partial^\circ P(X^2), \partial R\Big\} - n \leqslant 2n - n = n.$$

Les deux points précédents montrent comme voulu que $f_n(P) = Q + XR \in \mathbb{C}_n[X]$.

Q3 ~~20 a)~~ Avec des notations évidentes, si $P = 1$, $(Q, R) = (0, 1)$ donc $f_2(1) = X$; si $P = X$, $(Q, R) = (1, 0)$ donc $f_2(X) = 1$; enfin, si $P = X^2$, $(Q, R) = (X^2, 0)$ donc $f_2(X^2) = X^2$. Du coup $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2

3 Q4 ~~b)~~ Comme $A^2 = I_3$, A est inversible d'inverse elle-même. A fortiori f_2 est un automorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$ de réciproque lui-même, i.e. une symétrie de $\mathbb{C}_2[X]$.

Q5 ~~21~~ Nous avons vu à la question **16 b)** que les racines de U sont -1 et $2i$. Celles de T sont $1 + i$ et $-i$. Remarquons alors que $(1 + i)^2 = 2i$ et $(-i)^2 = -1$. Il en découle que :

$$U(X^2) = (X^2 - 2i)(X^2 + 1) = (X - 1 - i)(X + 1 + i)(X - i)(X + i) = (X + 1 + i)(X - i) \times T.$$

3

Le couple de la division euclidienne de $U(X^2)$ par T est donc $\big((X + 1 + i)(X - i), 0\big)$, donc $f(U) = (X + 1 + i)(X - i)$.

2.3 Etude d'un cas particulier

22 Avec des notations évidentes, si $P = 1$, $(Q, R) = (0, 1)$ donc $f_3(1) = X$; si $P = X$, $(Q, R) = (0, X^2)$ donc $f_3(X) = X^3$; si $P = X^2$, $(Q, R) = (X - 1, X^2 - aX + a)$ donc $f_3(X^2) = X^3 - aX^2 + (a + 1)X - 1$; et pour finir, si $P = X^3$, $(Q, R) = \big(X^3 - X^2 + X - (a+1), (2a+1)X^2 - aX + (a^2+a)\big)$ donc $f_3(X^3) = (2a+2)X^3 - (a+1)X^2 + (a^2+a+1)X - (a+1)$. Le résultat en découle aussitôt.

DS7 Corrigé

Exercice 3

Q1 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$
$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$= (b-a)(c-a)\left(c^2+ac+a^2-(b^2+ab+a^2)\right) = (b-a)(c-a)\left(c^2-b^2+a(c-b)\right)$

$\boxed{D = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}$

Q2 avec $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$
puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}$
⋮
puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

on a $D_n = \begin{vmatrix} a & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & b-a \\ b & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1} \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & -1 \\ b & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a-b)^{n-1}\left(a \begin{vmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} + b \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} \right)$

avec $\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 1 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta_{n-1} = 1 + \Delta_{n-2}$
donc $\Delta_{n-1} = n-1$ (car $\Delta_1 = 1$)

d'où $\boxed{D_n = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)}$

Exercice 4

Q3 on a, $\forall x \in E$, $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^2$
donc $\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2}$

2

on a $\forall y \in E$, $y \in \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \exists x \in E, y = f^2(x)$, donc $y = f(f(x))$
donc $y \in \operatorname{Im} f$, d'où $\boxed{\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f}$

Q4 soit $\tilde{f} : \operatorname{Im} f \to E$, $x \mapsto f(x)$ le théorème du rang dit $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} \tilde{f} + \dim \operatorname{Im} \tilde{f}$
or $\operatorname{Ker} \tilde{f} = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} \tilde{f}$
mais $f \circ f = \tilde{f} \circ f$: $E \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \xrightarrow{\tilde{f}} E$, $x \longmapsto f(x) \longmapsto f \circ f(x)$ donc $\dim \operatorname{Im} \tilde{f} = \dim f^2$
d'où $\boxed{\dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} f^2 = \dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f}$

Q5 le théorème du rang dit que $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$
et $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2$
donc $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f^2 - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} f^2}$

Q6 $\Rightarrow$: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$ par Q4, or $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$
(car $f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0$) donc $\underline{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2}$

$\Leftarrow$: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2$ par Q4, or $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$
(car $y = f^2(x) \Rightarrow y = f(f(x))$) donc $\underline{\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2}$

d'où l'équivalence.

Q7 $\Rightarrow$: par Q3, $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0$
donc $\underline{\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}}$ or $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$,
et (Grassmann) $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f - \underline{\dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f}$ 0
donc $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \dim E$ or $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \subset E$
d'où $\underline{\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E}$
Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E}$

$\Leftarrow$: on a $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, donc par Q3 $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2$
or $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$, donc $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2}$

Q8 on a $f^3 - Id_E = 0$ donc $(f - Id_E) \circ (f^2 + f + Id_E) = f^3 - Id_E^3 = 0$
de même $(f^2 + f + Id_E) \circ (f - Id_E) = 0$
Soit $y \in \operatorname{Im}(f - Id_E)$, $y = (f - Id_E)(x)$ pour un $x \in E$
donc $(f^2 + f + Id_E)(y) = (f^2 + f + Id_E)(f - Id_E)(x) = 0$
donc $y \in \operatorname{Ker}(f^2 + f + Id_E)$, d'où le résultat demandé.

Q9 soit $x \in \operatorname{Im}(f - Id_E) \cap \operatorname{Ker}(f - Id_E)$: soit y tq $x = (f - Id_E)(y)$
on a $x = f(y) - y$ $(*)$, or $x \in \operatorname{Ker}(f - Id_E)$ donc $f(x) - x = 0$: $f(x) = 0$
d'où $f(x) = x = f^2(y) - f(y)$ $(**)$, et $f(x) = x = f^3(y) - f^2(y) = y - f^2(y)$ (car $f^3 = Id_E$)
avec $(*)$ on déduit $2x = f(y) - f^2(y) = -x$
donc $3x = 0$, donc $\underline{x = 0}$ □

Q10 si $x \in \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, on a $\begin{cases} f(x) = x \\ f^2(x)+f(x)+x = 0 \end{cases}$

donc $f^2(x) = f(x) = x$, donc $3x = 0$, donc $\underline{x=0}$

Ainsi $\underline{\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) = \{0\}}$

Or par Q7, $\dim \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E) \geq \dim \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$

donc $\dim \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) \geq \dim E$

or par Grassmann, $\dim(\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E))$

$= \dim \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$

$\underline{- \dim \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)}$

donc $\dim(\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}\, f-\mathrm{Id}_E) \geq \dim E$ donc $= \dim E$

d'où $\mathrm{Ker}\, f^2+f+\mathrm{Id}_E + \mathrm{Ker}\, f-\mathrm{Id}_E = E$

et la somme est donc directe.

Problème

PARTIE A

Q1 $g(a) \overset{\wedge}{=} A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -6\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-10\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{g(a) = (-10,-1)}$, $\begin{vmatrix}2 & -10\\3 & -1\end{vmatrix} = -2+10 = 8 \neq 0$

abus de notation!

2

donc $\det(a, g(a)) \neq 0$, donc $(a, g(a))$ libre, d'où $\boxed{g \text{ cyclique}}$ car $n=2$ ici.

Q2 $g^2(a) = A\, g(a) = \begin{pmatrix}4 & -6\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-40+6\\-10+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-34\\-9\end{pmatrix}$ donc $g^2(a) = x a + y g(a)$

2

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10y = -34 \\ 3x - y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -30y + 2y = -3\times 34 + 18 \\ 3x = y - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}}$

Q3

2

$$\boxed{A' = \begin{array}{cc|c} g(a) & g^2(a) & \\ \hline \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} a \\ g(a) \end{array}}$$

car $g(a) = 0 \times a + 1\, g(a)$

$g^2(a) = -2a + 3\, g(a)$

Q4 on a $u = (x,y) \in \mathrm{Ker}(g - 2\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow g(u) = 2u \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 2x \\ x - y = 2y \end{cases}$

2

car $g(u) = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, d'où $\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y \Leftrightarrow u = y(3,1)$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(g - 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((3,1))}$

Q5 $b = (3,1)$ convient car $g(b) = 2b$ donc $\boxed{(b, g(b)) \text{ lié, donc pas base de } \mathbb{R}^2.}$

PARTIE B

Q6 $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-4+6) = 4 \neq 0$

2

donc h injective, or h est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie, donc h est bijective, donc un automorphisme de $E = \mathbb{R}^3$

Q7 en utilisant Q14, on voit que si $\boxed{v = (0,3,1)}$ on a $h(v) = 2v$

car A comme sous-matrice la matrice de g dans les questions précédentes.

De plus, il est facile de voir que $h(e_1) = 2e_1$, on peut prendre $\boxed{u = e_1}$

Cherchons $w = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id})$, i.e. $h(w) = w$:

4

on a $\begin{cases} 2x = x \\ 4y - 6z = y \\ y - z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3y - 6z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ d'où $\boxed{w = (0, 2, 1)}$ convient

on vérifie (u,v,w) libre car $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$

Donc dans la base (u,v,w), la matrice de h est
$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h(u) & h(v) & h(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array}$$

Alors
$$\boxed{P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}}$$

Q8 on a $h^2 - 3h + 2\mathrm{Id}_E = 0 \Leftrightarrow A^2 - 3A + 2I = 0 \Leftrightarrow P^{-1}(A^2 - 3A + 2I)P = 0$

2

$\Leftrightarrow P^{-1}A^2P - 3P^{-1}AP + 2P^{-1}P = 0 \Leftrightarrow D^2 - 3D + 2I = 0$

ce qui est immédiat : $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

car 2 et 1 sont racines de $X^2 - 3X + 2$.

Q9 pour tout $a \in E$, $h^2(a) - 3h(a) + 2a = 0$ par Q18,

2

donc $(a, h(a), h^2(a))$ est liée, or $n = 3$ donc $\boxed{h \text{ n'est pas cyclique.}}$

PARTIE C

Q10 $u(X^{n-2}) = (n-1)X^{n-2}$, $u^2(X^{n-1}) = (n-1)(n-2)X^{n-3}$, ...

d'où, par une récurrence immédiate, $u^k(X^{n-1}) = (n-1)\cdots(n-k)X^{n-k-1}$

d'où $u^k(X^{n-1}) = \dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!} X^{n-k-1}$, ceci pour $k = 1, \dots, n-1$

Q11 on a $\deg\left(u^k(X^{n-1})\right) = n-1-k$, pour $k = 0, 1, \dots, n-1$

donc la famille $\left(X^{n-1}, u(X^{n-1}), \dots, u^{n-1}(X^{n-1})\right)$ est échelonnée en degré, donc libre : donc $\boxed{u \text{ est cyclique}}$

PARTIE B

Q22 $v(X^k) = (X+1)^k - X^k = \underbrace{X^k + \binom{k}{1}X^{k-1} + \binom{k}{2}X^{k-2} + \dots + \binom{k}{k-1}X + 1}_{\text{binôme}} - X^k$

$= kX^{k-1} + \cdots$ or $k \neq 0$ donc $\boxed{\deg v(X^k) = k-1}$

Q23 on a $\deg v(P) \leq \deg P$ donc v est à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$;

de plus, si $P, Q \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X)$

$= \lambda\left(P(X+1) - P(X)\right) + \mu\left(Q(X+1) - Q(X)\right) = \lambda v(P) + \mu v(Q)$,

donc v est linéaire, d'où $\boxed{v \in \mathcal{L}(E)}$

Q24 soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $d = \deg P \leq n-1$, v linéaire

donc $v(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k v(X^k)$, or $\deg v(X^k) = k-1$ si $k \geq 1$, $v(1) = 0$

donc $\underline{\deg(v(P))} = \deg v(X^d) = d-1 = \underline{\deg P - 1}$ □

Q25 la famille $\left(X^{n-1}, v(X^{n-1}), \dots, v^{n-1}(X^{n-1})\right)$ est échelonnée en degré, car d'après Q24 et une récurrence immédiate,

$\deg\left(v^k(X^{n-1})\right) = n-1-k$, donc $\boxed{v \text{ est cyclique.}}$

Q26 on a $v(P) = 0 \Rightarrow \deg P = 0$, car d'après Q24, $\deg P \geq 1 \Rightarrow \deg v(P) = 0$ donc $v(P) \neq 0$

d'où $P = \lambda \in \mathbb{R}^*$, ainsi $\boxed{\operatorname{Ker} v = \operatorname{Vect}(1)}$ $(\deg 0 = -\infty)$

$\boxed{\text{et } (1) \text{ base de } \operatorname{Ker} v.}$

Q27 d'après le théorème du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v$,

donc $\underline{\dim \operatorname{Im} v = n-1}$

or Q24 montre $\deg(v(P)) \leq n-2$, donc $\operatorname{Im} v \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ qui est de dimension $n-1$, donc $\boxed{\operatorname{Im} v = \mathbb{R}_{n-2}[X]}$

Q28 rien à répondre ... bug de l'énoncé ...

Q29 on a clairement $\deg P_k = k$ donc $\mathcal{B}' = (P_0, \dots, P_{n-1})$ est échelonnée en degré, donc libre, or $\dim E = n$, donc $\boxed{\text{c'est une base de } E}$

Q30 $n = 4$: on cherche a, b, c, d tq

$X^3 - 5X^2 + X - 3 = aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3$

$= a + bX + c\,\frac{1}{2}X(X-1) + d\,\frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$ | $X^3 - 3X^2 + 2X$

$= a + \cancel{bX} + \frac{c}{2}X^2 - \frac{c}{2}X + \frac{d}{6}X^3 - \frac{dX^2}{2} + \frac{dX}{3}$

$= \frac{d}{6}X^3 + \left(\frac{c}{2} - \frac{d}{2}\right)X^2 + \left(b - \frac{c}{2} + \frac{d}{3}\right)X + a$

d'où $\begin{cases} \frac{d}{6} = 1 \\ \frac{c}{2} - \frac{d}{2} = -5 \\ b - \frac{c}{2} + \frac{d}{3} = 1 \\ a = -3 \end{cases}$ donc $d = 6$, $c = 2(-5+3) = -4$, $b = 1 - 2 - 2 = -3$, $a = -3$

$\boxed{\text{donc les coordonnées dans } \mathcal{B}' \text{ de } X^3 - 5X^2 + X - 3 \text{ sont } (-3, -3, -4, 6)}$

Q31 on a $\underline{v(P_k)} = P_k(X+1) - P_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$

$= \frac{1}{k!}\left((X+1)X(X-1)\cdots(X-k+2) - X(X-1)\cdots(X-k+2)(X-k+1)\right)$

$= \frac{1}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+2)\left((X+1) - (X-k+1)\right) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)(1+k-1)$

$= \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) = \underline{P_{k-1}}$ □

Q32 on déduit de Q31 et $\deg P_k = k$ que $(P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_0)$

$= \left(P_{n-1}, v(P_{n-1}), \dots, v^{n-1}(P_{n-1})\right)$ est échelonnée en degré, donc libre,

donc $\boxed{v \text{ est cyclique}}$