Devoir de vacances: espaces vectoriels

Exercice 1
(865)On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = (1,1,1) \text{ et } \vec{v} = (1,0,-1)$$

Montrer

$$\text{Vect}(\vec{u},\vec{v}) = \{(2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2
(875)Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x$$

a) Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
b) Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 3
(918)Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

Exercice 7
(968)Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 4

On considère $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z + t = 0\}$.

Q9 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Q10 Déterminer une base de F.

Q11 Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y \text{ et z = t}\}$.

Q12 Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Q13 Déterminer une base de H.

Q14 Déterminer $F + H$.

Q15 En déduire la dimension de $F \cap H$.

Q16 Déterminer une base de $F \cap H$.

Q17 F et H sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$. On définit $F = \text{Vect}\,(\{u, v\})$.

Q 20 Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de F, et donner la dimension de F.

Q 21 En complétant $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$.

Soit H l'ensembles des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Q 22 Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Q 23 Déterminer une base de H. Que dire de H ?

Q 24 Déterminer $H \cap F$.