Corrigés DM 14: espaces vectoriels
PCSI 2

Exercice 1 (865)

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = (1,1,1) \text{ et } \vec{v} = (1,0,-1)$$

Montrer

$$\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v}) = \{(2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

Corrigé

pan class='Eq'>$\{(2\alpha,\alpha+\beta,2\beta)|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\vec{x},\vec{y})$ avec $\vec{x} = (2,1,0)$ et $\vec{y} = (0,1,2)$.

On a $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{y})$ donc $\vec{u},\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{x},\vec{y})$ puis $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{x},\vec{y})$.

Aussi $\vec{x} = \vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{y} = \vec{u}-\vec{v}$ donc $\vec{x},\vec{y} \in \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ puis $\mathrm{Vect}(\vec{x},\vec{y}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$.

Par double inclusion l'égalité.

Exercice 2 (875)

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$ pour lesquels~:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2+bx+c)\cos x$$

a) Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Déterminer une base de E et sa dimension.

Corrigé

$E = \mathrm{Vect}(f_0,f_1,f_2)$ avec $f_0(x) = \cos x$, $f_1(x) = x\cos x$ et $f_2(x) = x^2\cos x$.

E est donc un sous-espace vectoriel et (f_0,f_1,f_2) en est une famille génératrice.

b) Supposons $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\cos x = 0$.

Pour $x = 2n\pi$, on obtient $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $\gamma \neq 0$ alors $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma \to \pm\infty$. C'est exclu. Nécessairement $\gamma = 0$.

On a alors $\alpha + 2n\pi\beta = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, puis $n = 1$ on obtient successivement $\alpha = \beta = 0$.

Finalement (f_0,f_1,f_2) est une famille libre. C'est donc une base de E et $\dim E = 3$

Exercice 3 (918)

Comparer $\mathrm{Vect}(A\cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A)\cap\mathrm{Vect}(B)$.

Corrigé

pan class='Eq'>$A\cap B \subset \mathrm{Vect}(A)\cap\mathrm{Vect}(B)$ et $\mathrm{Vect}(A)\cap\mathrm{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}(A\cap B) \subset \mathrm{Vect}(A)\cap\mathrm{Vect}(B)$. L'inclusion réciproque n'est pas vraie : prendre $A = \{\vec{u}\}$ et $B = \{2\vec{u}\}$ avec $\vec{u} \neq \vec{o}$

Exercice 4 (920)

Soient $F = \left\{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$ et
$G = \left\{x \mapsto ax+b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Corrigé

pan class='Eq'>$F \subset \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\tilde{o} \in F$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in F$,
$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$ et $(\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$
donc $\lambda f + \mu g \in F$.

$G \subset \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\tilde{o} \in G$ (en prenant $a = b = 0$), $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in G$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$ et on a alors $(\lambda f + \mu g)(x) = ex + f$ avec $e = \lambda a + \mu c \in \mathbb{R}$ et $f = \lambda b + \mu d \in \mathbb{R}$ donc $\lambda f + \mu g \in G$.

Soit $h \in F \cap G$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = ax + b$ car $h \in G$.

Or $h \in F$ donc $h(0) = b = 0$ et $h'(0) = a = 0$ puis $h(x) = 0$ i.e. $h = \tilde{o}$. Ainsi $F \cap G = \left\{\tilde{0}\right\}$.

Soit $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Posons $a = h'(0) \in \mathbb{R}$, $b = h(0)$, $g : x \mapsto ax + b$ et $f = h - g$.

Clairement $g \in G$ et $h = f + g$. De plus $f(0) = h(0) - b = 0$ et $f'(0) = h'(0) - a = 0$ donc $f \in F$.

Ainsi $F + G = \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Finalement, F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 5 (922)

Soient $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ et $\vec{u} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{K}^n$.
Montrer que H et $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

Corrigé

pan class='Eq'>$H \subset \mathbb{K}^n$, $\vec{o} = (0, \ldots, 0) \in H$ car $0 + \cdots + 0 = 0$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in H, \forall \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in H$, on a $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$ avec
$(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) + \mu(y_1 + \cdots + y_n) = 0$
donc $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in H$.

$\mathrm{Vect}(\vec{u}) = \mathbb{K}\vec{u}$ est un sous-espace vectoriel.

Soit $\vec{v} \in H \cap \mathrm{Vect}(\vec{u})$. On peut écrire $\vec{v} = \lambda \vec{u} = (\lambda, \ldots, \lambda)$ car $\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{u})$.

Or $\vec{v} \in H$ donc $\lambda + \cdots + \lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ et donc $\vec{v} = \vec{o}$. Ainsi $H \cap \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \{\vec{o}\}$.

Soit $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$. Posons $\lambda = \frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n)$, $\vec{y} = \lambda \vec{u}$ et $\vec{x} = \vec{v} - \vec{y}$.

Clairement $\vec{x} + \vec{y} = \vec{v}$, $\vec{y} \in \mathrm{Vect}(\vec{u})$. De plus $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_1 + \cdots + x_n = (v_1 - \lambda) + \cdots + (v_n - \lambda) = (v_1 + \cdots + v_n) - n\lambda = 0$ donc $\vec{x} \in H$. Ainsi $H + \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \mathbb{K}^n$.

Finalement H et $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice 6 (960)

Les parties de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels~?

(II)a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est monotone}\}$	b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule en } 0\}$
c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule}\}$	d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$.

Corrigé

non

b) oui

c) non

d) oui.

Exercice 7 (968)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

r contraposée, si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ alors $\exists \vec{x} \in F, \vec{x} \notin G$ et $\exists \vec{y} \in G, \vec{y} \notin F$.

$\vec{x} + \vec{y} \notin F$ car $\vec{x} + \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{y} = (\vec{x} + \vec{y}) - \vec{x} \in F$ ce qui est exclu.

$\vec{x} + \vec{y} \notin G$ car $\vec{x} + \vec{y} \in G \Rightarrow \vec{x} = (\vec{x} + \vec{y}) - \vec{y} \in G$ ce qui est exclu.

Ainsi, on a $\vec{x}, \vec{y} \in F \cup G$ et $\vec{x} + \vec{y} \notin F \cup G$.

Puisque $F \cup G$ n'est pas stable pour l'addition, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

PCSI 2

<u>Problème</u> : voir page suivante

sauf le <u>5</u> :

a) $\Rightarrow$ b) triviale

b) $\Rightarrow$ c) c'est <u>4</u>.

c) $\Rightarrow$ a) c'est <u>3</u> + <u>1</u> $(B_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z})$.

DM 14 Problème

1. $\deg B_0 = 0$, si $n \geq 1$, B_n est un produit de n polynômes de degré 1, donc $\boxed{\deg B_n = n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$: si $p \geq n-1$, on a $B_n(p) = \frac{1}{n!} p(p-1)\cdots(p-n+1) = \binom{p}{n} \in \mathbb{Z}$

si $p \in [\![0, n-1]\!]$, $B_n(p) = 0 \in \mathbb{Z}$

si $p < 0$, $B_n(p) = \frac{(-1)^n}{n!} (-p)(-p+1)\cdots(-p+(n-1))$

$$= (-1)^n \binom{(n-1)-p}{n} \in \mathbb{Z}$$

donc finalement $\boxed{P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}}$

2. $(B_0, \dots, B_n)$ est échelonnée en degré (voir 1) donc libre

or $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \mathrm{card}(B_0, \dots, B_n)$ donc

la famille est $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

3. $P(i) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k(i) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \binom{i}{k}}$ d'après 1.

4. par récurrence sur i :

$P(0) = \alpha_0 B_0(0) + \dots + \alpha_n B_n(0) = \alpha_0$ donc $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ □

Supposons $\forall k \leq i$, $\alpha_k \in \mathbb{Z}$

On a $P(i+1) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \binom{i+1}{k} = \sum_{k=0}^{i} \alpha_k \binom{i}{k} + \alpha_{i+1}$ car $k > i+1 \Rightarrow \binom{i+1}{k} = 0$

or $P(i+1) \in \mathbb{Z}$ et $\forall k \leq i$, $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ par hyp. de réc., donc $\alpha_{i+1} = P(i+1) - \sum_{k=0}^{i} \alpha_k \binom{i}{k} \in \mathbb{Z}$ □

d'où $\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!], \alpha_i \in \mathbb{Z}}$

Exercice 3 :

Q9 on a $F = \operatorname{Ker} f$ où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$ (dans les bases canoniques)

c'est donc un sev de $\mathbb{R}^4$.

Q10 appliquons la méthode du cours :

$$\left(\frac{A}{I_4}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{c}{\sim} \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

par $C_2 \leftarrow 2C_2 + C_1$

$C_3 \leftarrow -2C_3 + C_1$

$C_4 \leftarrow -2C_4 + C_1$

d'où $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker} f = F : \mathcal{B}_F = \left((1,2,0,0), (1,0,-2,0), (1,0,0,-2)\right)}$

Q11 comme $\dim F = 3$, on aura $\dim G = \dim \mathbb{R}^4 - 3 = 1$

or $(1,1,1,1) \notin F$ donc $\boxed{G = \operatorname{Vect}((1,1,1,1)) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}^4}$

Q12 on a $H = \operatorname{Ker} g$ où $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ de matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (dans les bases canoniques)

donc H est un sev de $\mathbb{R}^4$

Q13 m̂ méthode :

$$\left(\frac{B}{I_4}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{c}{\overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{c}{\overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$C_4 \leftarrow C_4 + C_2$

$$\underset{c}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\operatorname{Ker} g$

donc $\boxed{\text{une base de } H \text{ est } \mathcal{B}_H = \left((1,1,0,0), (0,0,1,1)\right)}$

Q14) $B_F \cup B_H$ est génératrice de $F+H$

Montrons que $B_F \cup ((1,1,0,0))$ est libre

$$\det(B_F \cup ((1,1,0,0))) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{par } C_i \leftarrow C_i - C$$

$$\underset{\text{dévelop. selon } L_1}{=} \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} 0+0-4-0-0-0$$

$= -4 \neq 0$ donc libre

ainsi $B_F \cup ((1,1,0,0))$ est une base de $F+H$

donc $\dim F+H = 4$ et donc $\boxed{F+H = \mathbb{R}^4}$

Q15) par Grassmann : $\dim F+H = \dim F + \dim H - \dim F\cap H$

donc $4 = 3 + 2 - \dim F\cap H$

donc $\boxed{\dim F\cap H = 1}$

Q16) il suffit de trouver un vecteur non nul de $F\cap H$ car $\dim F\cap H =$

$$\begin{cases} 2x-y+z+t=0 \\ x=y \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \quad y+2t=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-2t \\ x=-2t \\ z=t \end{cases}$$

d'où par exemple $t=1$: $\boxed{((-2,-2,1,1)) \text{ base de } F\cap H}$

Q17) $\boxed{\text{non car } F\cap H \neq \{0\}}$

Exercice 4

Q18) on multiplie A par les coordonnées de u en colonne :

$$u=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 2x-z \\ x+y-z \\ z \end{pmatrix} = f(u)}$$

7

Q20 $\mathcal{B}$ est génératrice par définition de F.

On a $\lambda u + \mu v = 0 \iff \lambda(1,2,3) + \mu(3,2,1) = 0$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \lambda + 3\mu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu = 0 \\ 3\lambda + \mu = 0 \end{array}\right. \Rightarrow 4\lambda + 4\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu$$

or $\lambda + 3\mu = 0$ donc $2\mu = 0$ donc $\mu = 0$ et $\lambda = 0$

Ainsi (u, v) libre, donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ base de } F}$

$\dim F = \operatorname{Card} \mathcal{B} = 2$ F est un plan.

Q21 complétons par un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par exemple $e_1 = (1,0,0)$

(u, v, e_1) libre?

On a $\lambda u + \mu v + \delta e_1 = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \delta = 0 \\ 2\lambda + 2\mu = 0 \\ 3\lambda + \mu = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \lambda = \mu = 0$ $\Rightarrow \delta =$

donc (u, v, e_1) libre,

or $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc $\boxed{(u, v, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

On en déduit que $\boxed{G = \operatorname{Vect}(e_1) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}^3}$

Q22 * $0_{\mathbb{R}^3} \in H$ car le vecteur $(0,0,0)$ vérifie les équations de H.

* supposons $u = (x, y, z) \in H$ et $v = (x', y', z') \in H$

on a $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$

or $(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(x + y + z) + \mu(x' + y' + z')$
$= 0$ car $u, v \in H$

et $2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(2x - y + z) + \mu(2x' - y' + z')$
$= 0$ car $u, v \in H$

donc $\lambda u + \mu v \in H$

Ainsi H est un sev.

Q23 on a $(x,y,z) \in H \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ -3y-z=0 \end{cases}$ par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$\iff \begin{cases} 3x+2z=0 \\ -3y-z=0 \end{cases}$ par $L_1 \leftarrow 3L_1+L_2$ $\iff \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = -\frac{1}{3}z \end{cases} \iff (x,y,z) = z\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$

$= \frac{z}{3}(-2,-1,3)$

ainsi $H = \text{Vect}\big((-2,-1,3)\big)$

donc $\boxed{\big((-2,-1,3)\big) \text{ est une base de } H}$ (générateur, et libre car $\neq 0$)

$\dim H = \text{Card}\,\{(-2,-1,3)\} = 1$ donc $\boxed{H \text{ est une droite}}$

Q24 $w \in H \cap F$: on a $w \in F \iff w = \lambda u + \mu v$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

donc $w = (\lambda+3\mu,\ 2\lambda+2\mu,\ 3\lambda+\mu)$

alors $w \in H \iff \begin{cases} (\lambda+3\mu)+(2\lambda+2\mu)+(3\lambda+\mu)=0 \\ 2(\lambda+3\mu)-(2\lambda+2\mu)+(3\lambda+\mu)=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 6\lambda+6\mu=0 \\ 3\lambda+5\mu=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \end{cases}$ d'où $w=0$

ainsi $\boxed{H \cap F = \{0\}}$ on en déduit $\underline{H \oplus F = \mathbb{R}^3}$