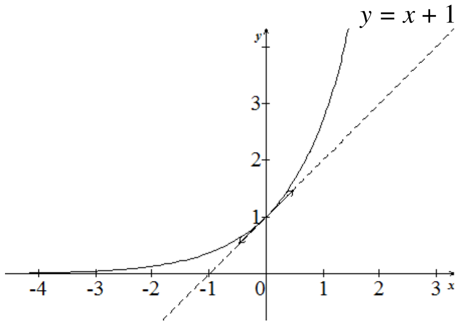
FONCTIONS LN ET EXP

I – Fonction exponentielle

Def. *La fonction exponentielle, notée* exp*, est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :* $f' = f$ et $f(0) = 1$.



Prop.
- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp x$.

Prop. *Propriétés de calcul.*
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$

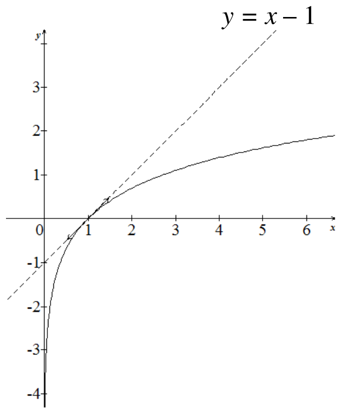
Prop. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$: sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes.
En particulier, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 1 \le e^x$

Prop. *Quelques limites.* • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$

Prop. *Croissances comparées.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

II – Fonction logarithme népérien ln

Def. *La fonction logarithme népérien, notée* ln, *est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui, à tout réel strictement positif b associe l'unique solution de l'équation $e^x = b$.*
On a : $\ln : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$



Prop.
- On a : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \exp x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}^{+*} \\ x = \ln y \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp x) = x$ et $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exp(\ln y) = y$

Prop.
- La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Prop. *Propriétés de calcul.*
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln x$

Prop. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$: sa courbe représentative est située au-dessous de chacune de ses tangentes.
En particulier, on a : $\forall x > 0$, $\ln x \le x - 1$ ou $\forall x > -1$, $\ln(1 + x) \le x$

Prop. *Quelques limites.* • $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1 + h)}{h} = \ln'(1) = 1$

Prop. *Croissances comparées.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ • $\lim\limits_{x \to 0+} x^n \ln x = 0$