Chapitre 1 : Les nombres usuels, les réels - résumé de cours

1. Ensembles de nombres usuels

1.1 Les entiers :

Def : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0,1, 2,..., n, n + 1,...\}$,

Si on admet les 3 propriétés suivantes comme des **axiomes** :
① Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
② Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée admet un plus grand élément.
③ $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

On peut alors montrer que
★ $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément qui est 0.
★ Tout entier $n\in\mathbb{N}$ a un successeur noté $(n+1)$
★ Tout entier $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 1$ a un prédécesseur noté $(n - 1)$
★ La validité de la démonstration par récurrence :

Principe de récurrence:

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour un entier } n \text{ quelconque, } n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geq n_0$.

Vocabulaire:
★ Vérifier $\mathcal{P}(n_0)$ constitue l'**initialisation** du raisonnement par récurrence.
★ Une propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifiant $\forall n\geq n_0$, $\mathcal{P}(n)\Rightarrow\mathcal{P}(n+1)$ est dite **héréditaire**.

Attention: Une propriété peut être héréditaire et par ailleurs, fausse! L'étape d'initialisation est donc indispensable pour conclure.

Exercice : Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $n < 2^n$ *Voir aussi exos de rentrée.*

Def : $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs. Il contient $\mathbb{N}$ et tous les opposés des entiers naturels.

On note $[\![n, p]\!]$ la partie de $\mathbb{Z}$ définie par $\{x\in\mathbb{Z}, n \leq x \leq p\}$.
$[\![1, 10]\!] = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

1.2 Les rationnels

Def : $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels. $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b}, a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^* \}$.

Tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit de manière unique sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où les entiers p et q sont premiers entre eux.

$\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des décimaux. $\mathbb{D} = \{ \frac{a}{10^n}, a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N} \}$. $\mathbb{D}$ est strictement inclus dans $\mathbb{Q}$.

1.3 Les réels

Def : $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels. Il contient toutes les longueurs et leurs opposées

Les réels non rationnels sont dits irrationnels ils forment l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
$\sqrt{2}$, π et e sont irrationnels.
On représentera $\mathbb{R}$ par un axe gradué appelé droite réelle ou droite numérique.

✍ Exercice : Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, n^2 est pair si et seulement si n est pair puis montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

L'ensemble des nombres réels est muni de 2 opérations : l'addition et la multiplication.

★ L'addition dans $\mathbb{R}$ vérifie :

- Elle est *interne* dans $\mathbb{R}$: $\forall(a, b) \in\mathbb{R}^2$, $a + b \in \mathbb{R}$
- Elle est *associative* : $\forall(a, b, c) \in\mathbb{R}^3$, $(a + b) + c = a + (b + c)$
- 0 est *neutre* pour l'addition $\forall a \in\mathbb{R}$, $a + 0 = 0 + a$
- Tout élément a de $\mathbb{R}$ admet *un opposé*, appartenant à $\mathbb{R}$, noté $-a$ tel que :
$a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- Elle est *commutative* : $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b = b + a$.

★ La multiplication dans $\mathbb{R}$ vérifie :

- Elle est *interne* dans $\mathbb{R}$: $\forall(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $a \times b \in \mathbb{R}$
- Elle est *associative* : $\forall(a, b, c)\in\mathbb{R}^3$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- 1 est *neutre* pour la multiplication : $\forall a \in\mathbb{R}$, $a \times 1 = 1 \times a$
- Elle est *commutative* : $\forall(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $a \times b = b \times a$
- la multiplication est *distributive par rapport à l'addition* :
$\forall(a, b, c)\in\mathbb{R}^3$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
$\forall(a, b, c)\in\mathbb{R}^3$, $c \times (a + b) = c \times a + c \times b$

- Tout élément **non nul** a de $\mathbb{R}$, admet *un inverse*, appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, noté a^{-1} ou $\frac{1}{a}$, tel que :

$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$.

Vocabulaire : $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication est un ***corps commutatif***.

- 0 est *absorbant* : $\forall a \in\mathbb{R}$, $a \times 0 = 0 \times a = 0$

- *Règle du produit nul* : $\forall(a, b) \in\mathbb{R}^2$, $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

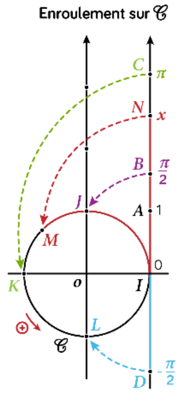
✍ Exercice : Vérifiez que $\mathbb{Q}$ muni des mêmes opérations est également un corps commutatif.

Est-ce le cas de $\mathbb{Z}$?

---

2. Cosinus et sinus d'un réel

Def : Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, on associe à tout réel x un unique point du cercle noté M.
L'abscisse de M est le cosinus de x et son ordonnée le sinus de x.



♥ Se reporter à la fiche de trigonométrie pour les formules à connaître.

✍ Exercices : Voir exos de rentrée.

✍ Justification géométrique des formules d'addition :

Def : Soit x et y deux réels. On dit que x et y sont congrus modulo 2π et on note $x \equiv y\ [2\pi]$, lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$

Propriété : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \equiv y\ [2\pi] \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(y)$ et $\sin(x) = \sin(y)$

---

3. Ordre dans ℝ

3.1 Définition et compatibilité avec les opérations

Def : Soit x et y deux réels. On dit que y est plus grand que x et on note $x \leq y$ lorsque la différence $(y - x)$ est un réel positif.

Propriétés immédiates : La relation précédente est
- Réflexive: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$
- Antisymétrique: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow y = x$
- Transitive: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

On peut toujours comparer deux réels, on dit que la relation ≤ est une relation d'ordre sur ℝ.
Ou encore que ℝ est totalement ordonné

Proposition 1.1 : La comparaison est compatible avec l'addition et la multiplication
① On peut ajouter un réel quelconque aux deux membres d'une inégalité :
$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.
② On peut multiplier par un réel quelconque les deux membres d'une inégalité :
- sans changer son sens si ce réel est positif : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$
- en changeant son sens si ce réel est négatif : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_-$, $x \leq y \Rightarrow \lambda x \geq \lambda y$.
③ On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens :
$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(x \leq y)$ et $(x' \leq y') \Rightarrow x + x' \leq y + y'$.
④ On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **PORTANT SUR DES REELS POSITIFS** : $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(0 \leq x \leq y)$ et $(0 \leq x' \leq y') \Rightarrow 0 \leq xx' \leq yy'$.

⚠ Attention : Des erreurs à éviter
- Avant de multiplier une inégalité par un réel, on étudie son signe.
- On ne soustrait pas membre à membre deux inégalités.
- On ne divise pas membre à membre deux inégalités.

3.2 Méthodes pratiques pour comparer deux réels :

★ Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence. Pour étudier le signe de cette différence on peut :

- Utiliser les résultats suivants :

  - La somme de deux réels positifs est positive.
  - Le produit de deux réels de même signe est positif, le produit de deux réels de signes contraires est négatif. *Tableau de signes.*
  - Le carré d'un réel est positif et la racine carrée d'un réel positif est positive.

- Etudier une fonction.

★Pour comparer deux nombres on peut utiliser le sens de variation des fonctions usuelles.
Si f est croissante sur I intervalle de $\mathbb{R}$ alors $\forall x, y \in I, x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$
Si f est décroissante sur I intervalle de $\mathbb{R}$ alors $\forall x, y \in I, x \le y \Rightarrow f(y) \le f(x)$
Applications :
- Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et que leurs racines carrées.
- Deux réels strictement de même signe, non nuls, sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse $0 < x \le y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$ et $x \le y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} \le \frac{1}{x} < 0$

⚠ Attention : Avant de passer aux inverses dans une inégalité on vérifie que les deux membres sont non nuls et de même signe.

3.3 Majorants, minorants:

Def: Soit A une partie de $\mathbb{R}$, m et M deux réels
- M est un majorant de A signifie que $\forall x \in A, x \le M$
- m est un minorant de A signifie que $\forall x \in A, m \le x$.
- On dit que A est majorée lorsqu' elle admet un majorant M et alors tous les réels supérieur à M sont aussi des majorants de A.
- On dit que A est minorée ssi elle admet un minorant m et alors tous les réels inférieur à m sont aussi des minorants de A.
- A est bornée ssi elle est majorée et minoré

3.4 Plus grand élément et plus petit élément:

Def: Soit A une partie de $\mathbb{R}$, m et M deux réels
- M est le plus grand élément de A lorsque M majore A et $M \in A$.
- m est le plus petit élément de A lorsque m minore A et $m \in A$.

Proposition 1.2: Soit A une partie de $\mathbb{R}$, si A admet un plus grand (resp petit) élément alors celui-ci est unique.

Notation: Si A admet un plus grand élément on le note max(A) et si A admet un plus petit élément on le note min(A).

3.5 Borne supérieure, borne inférieure

Def: Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
La borne supérieure de A est, si il existe, le plus petit des majorants de A.

La borne inférieure de A est, si il existe, le plus grand des minorants de A.
Sous réserve d'existence, on note sup(A) et inf(A) les réels ainsi définis.

Remarque: Si A possède un plus grand (resp plus petit) élément c'est nécessairement sa borne sup (resp inf).

Proposition 1.3: Caractérisation de la borne supérieure. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$
$\alpha = \sup(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq \alpha$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x$
$\beta = \inf(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, x \geq \beta$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon$

Important : Il faut savoir faire un schéma illustrant ces caractérisations.

Théorème 1.1 (admis): Toute partie non vide et majorée (resp minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Conventions : Si A n'est pas majorée, on convient que $\sup(A) = +\infty$ et si A n'est pas minorée, que $\inf(A) = -\infty$

Vocabulaire : On dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

---

4. Valeur absolue d'un réel, intervalles de $\mathbb{R}$:

Def : Soit x un réel, la valeur absolue de x est le réel positif noté $|x|$ et défini par
$|x| = \max(x, -x)$

Proposition 1.4 : Propriétés de la valeur absolue : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

① $-\lvert x\rvert \leq x \leq \lvert x\rvert$	③ $\lvert x\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$
② $\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$	④ $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$
⑤ $x^2 = y^2 \Leftrightarrow \lvert x\rvert = \lvert y\rvert$	⑦ $\lvert x/y\rvert = \lvert x\rvert/\lvert y\rvert$ avec $y \neq 0$
⑥ $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert\,\lvert y\rvert$	⑧ $\lvert\,\lvert x\rvert - \lvert y\rvert\,\rvert \leq \lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$

Dans la pratique : Pour tout réel x, $|x| =$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$

Def : Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si dès qu'elle contient deux réels a et b, elle contient tous les réels compris entre a et b.
Ou encore I est un intervalle de $\mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall (a, b) \in I^2, a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$.

Vocabulaire : les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Classification des intervalles de $\mathbb{R}$: Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

★ $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

★ **Les intervalles bornés de $\mathbb{R}$**:
- $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \}$ intervalle fermé borné ou *segment*.
- $[a, b [= \{ x \in \mathbb{R}, a \leq x < b \}$ intervalle borné semi-ouvert à droite.
- $] a, b] = \{ x \in \mathbb{R}, a < x \leq b \}$ intervalle borné semi-ouvert à gauche.
- $] a, b [= \{ x \in \mathbb{R}, a < x < b \}$ intervalle borné ouvert.

★ **Les intervalles non bornés de $\mathbb{R}$**:
- $[a, +\infty [= \{ x \in \mathbb{R}, a \leq x \}$ intervalle fermé non majoré.
- $] a, +\infty [= \{ x \in \mathbb{R}, a < x \}$ intervalle ouvert non majoré.
- $] -\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R}, x \leq b \}$ intervalle fermé non minoré.
- $] -\infty, b [= \{ x \in \mathbb{R}, x < b \}$ intervalle ouvert non minoré.

Dans la pratique : Il peut être utile de paramétrer le segment [a, b] en le considérant comme l'ensemble $\{ ta + (1 - t)b, t\in[0,1] \}$.
Ainsi $x\in[a, b] \Leftrightarrow \exists t\in[0,1], x = ta + (1 - t)b$

Def : On définit la distance entre deux réels x et y par $d(x,y) = |x - y|$

Proposition 1.5 : Propriétés de la distance : $\forall x, y, z\in\mathbb{R}$.
① $d(x, y) = d(y, x)$ ② $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ③ $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$

Dans la pratique : Soit x et a deux réels et r un réel positif
$|x - a| = r \Leftrightarrow d(x,a) = r \Leftrightarrow x = a + r$ ou $x = a - r$
$|x - a| \leq r \Leftrightarrow d(x,a) \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$
$|x - a| \geq r \Leftrightarrow d(x,a) \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r$ ou $x \geq a + r \Leftrightarrow x \in]-\infty, a - r] \cup [a + r,+\infty[$
Important : Il faut savoir faire un schéma illustrant ces caractérisations.

5. Partie entière, approximations décimales

5.1 Partie entière

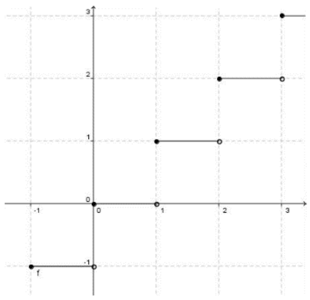
Def: Soit $x\in\mathbb{R}$, la partie entière de x est l'unique entier $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On note $n = \lfloor x \rfloor$ ou $n = E(x)$.

Exemples : $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$, $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$

Attention aux négatifs !!

La fonction partie entière est en escalier

$E(x) = \max \{ n\in\mathbb{Z}, n \leq x \}$



Proposition 1.6: **propriétés de la partie entière**
① $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$
② $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$
③ $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$
④ $\forall p\in\mathbb{Z}$, $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$

5.2 Approximations décimales d'un réel :

Déf : On dit que x' est une valeur approchée de x à ε près ssi $|x - x'| \leq \varepsilon$
Si $x' \leq x$ alors x' est une valeur approchée de x par défaut.
Si $x' \geq x$ alors x' est une valeur approchée de x par excès.

Proposition 1.7 : Soit $x\in\mathbb{R}$, $d_n = \dfrac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$ est l'approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près et $d_n + 10^{-n}$ est son approximation décimale par excès à 10^{-n} près.