Fiche: Logique et raisonnements – partie 1

Ce document est destiné être consulté tout au long de l'année. Les notions abordées constituent le fondement du cours de mathématiques.

1. Notions de base sur les ensembles

1.1 Généralités:

Def : Un ensemble est une collection d'objets. On peut le décrire de différentes façons:
- En le nommant si une notation lui a été attribuée: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$…
- En extension c'est à dire en listant ses éléments :

$A = \{1, -3, 2\}$ $B = \{0, 2, 4, \ldots, 2n\}$ PCSI2 = {Alexis, ... , Zoé}

- En compréhension c'est à dire en caractérisant ses éléments par une propriété $\mathcal{P}$

$A = \{x \in E, \mathcal{P}(x)\}$ A contient tous les éléments de E pour lesquels P(x) est vraie.

$S = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [0, 4]\}$

$3\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x$ divisible par $3\} = \{3k, k$ décrit $Z\}$

★ Vocabulaire et notations
- Si un ensemble E contient l'élément a on note $a \in E$ et on dit que a appartient à E. Sinon, on note: $a \notin E$.
- Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, c'est l'ensemble vide noté $\emptyset$.
- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément s'appelle un singleton. On note $E = \{a\}$.
- Deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments.

1.2 Parties d'un ensemble, inclusion:

Def: Soit E et A deux ensembles. A est une partie, ou un sous-ensemble, de E lorsque tout élément de A est dans E.
On note $A \subset E$ et on lit "A est inclus dans E"

⌿ Attention à ne pas confondre :
$\in$ est réservé aux éléments $\subset$ est réservé aux parties.

Exemples: $\{-1, 2, \sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

En pratique: Comment démontrer une inclusion ?
On prend un élément quelconque de A (Soit $x \in A$…) et on montre qu'il est nécessairement dans B (…..donc $x \in B$). On conclut : $A \subset B$.

Proposition : Soit A, B et C trois ensembles.
① $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$
② Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$

En pratique: Comment démontrer une égalité ?:
On procède le plus souvent par double inclusion: On montre que $A \subset B$ et $B \subset A$

Exercice: Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la partie
$\Gamma = \{M(x, y) \mid y = \sqrt{1-x^2}\}$.
Montrer que Γ est inclus dans le cercle trigonométrique. A-t-on égalité ?

Déf: On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E.

Attention: $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.

$\mathcal{P}(E)$ contient toujours $\varnothing$ et E.

Exercice: Si E = {1, 3, 2} donner les éléments de $\mathcal{P}(E)$

1.3 Opérations sur les parties d'un ensemble:

a) Réunion et intersection:

Def: Soit A et B dans $\mathcal{P}(E)$.
L'intersection de A et de B est $A\cap B = \{x\in E \mid x\in A$ **et** $x\in B\}$
La réunion de A et de B est $A\cup B = \{x\in E \mid x\in A$ **ou** $x\in B\}$.

★ Vocabulaire: Lorsque $A\cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont disjoints.

b) Complémentaire:

Def: Soit A une partie de E, le complémentaire de A dans E est noté $\overline{A}$ ou A^C et défini par :
$\overline{A} = \{x\in E, x\notin A\}$

c) Différence:

Def: Soit A et B des parties de E. La différence de A et de B est $A\backslash B = \{x\in E \mid x\in A \text{ et } x\notin B\}$.
On lit "A moins B" ou A privé de B".

★ Remarques : $A\backslash B = A\cap\overline{B}$ et $\overline{A} = E\backslash A$

1.4 Produit cartésien de deux ensembles:

Def: Soit E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et de F noté ExF est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x\in E$ et $y\in F$.
$E\times F = \{(x, y), x\in E, y\in F\}$

Exemple: $(-1, \sqrt{2})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, $(3, 1 + i)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$.

★ Notation: Si E = F, ExF = ExE est noté E^2.

Def : Soit E un ensemble, un n-uplet de E est une liste ordonnée d'éléments de E que l'on peut noter $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. L'ensemble de ces n-uplets constitue le produit cartésien $E^n = E\times E\times\dots\times E$.

Exemples :
- $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels.
- $\mathbb{N}^3$ est l'ensemble des triplets d'entiers naturels.

2. Quantificateurs

On considère une assertion mathématiques portant sur une variable x pouvant prendre ses valeurs dans un ensemble E. Par exemple : $\mathcal{P}(x)$: $x^2 \geq 4$ avec $x\in\mathbb{R}$.

$\forall x\in E, \mathcal{P}(x)$ est une assertion qui se lit signifie "pour tout x dans E, $\mathcal{P}(x)$.
$\forall$ est le **quantificateur universel**

$\exists x\in E, \mathcal{P}(x)$ est une assertion qui se lit "il existe (au moins) un élément de E tel que $\mathcal{P}(x)$.
$\exists$ est le **quantificateur existentiel**

Exemples:
Pour tout $x\in[0,1]$, $x^2 \leq 1$ se note $\forall x\in[0,1], x^2 \leq 1$
Il existe un entier naturel n tel que u_n est positif se note $\exists n\in\mathbb{N}, u_n \geq 0$

Remarque : la notation $\exists ! x\in\mathbb{R}, f(x) = 0$ signifie il existe un unique réel x annulant f(x).

Exercice: Dire si les propositions suivantes écrites symboliquement, sont vraies ou fausses:

a) $\forall x\in\mathbb{R}, x^2 \geq 0$ b) $\exists x\in\mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$

c) $\forall x\in\mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$ d) $\exists x\in\mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$

Dans la pratique :
★ Pour montrer que $\forall x\in E, \mathcal{P}(x)$ est vraie, on commence la preuve par : Soit $x\in E$…
puis on montre que, indépendamment de la valeur de x dans E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
★ Pour montrer que $\exists x\in E, \mathcal{P}(x)$ est vraie, on exhibe un élément x_0 de E tel que $\mathcal{P}(x_0)$ est vraie ou on utilise un théorème d'existence qui nous évite de chercher x_0.
★ Lorsqu'on a une hypothèse du type $\forall x\in E, \mathcal{P}(x)$, on peut remplacer x par une valeur choisie arbitrairement dans E. par exemple si $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) \geq 0$ alors $f(2) \geq 0$.
★ Lorsqu'on a une hypothèse du type $\exists x\in E, \mathcal{P}(x)$, on peut écrire : soit $a\in E$ tel que $\mathcal{P}(a)$…..sans se préoccuper de la valeur de a.

Exercice : Ecrire en français la négation des affirmations suivantes

A: Il existe de gentils professeurs de mathématiques

B: Tous les élèves de PCSI2 font leur travail.

Proposition :
La négation de la proposition $\forall x\in E, \mathcal{P}(x)$ est $\exists x\in E$, (non $\mathcal{P}(x)$)
La négation de la proposition $\exists x\in E, \mathcal{P}(x)$ est $\forall x\in E$, (non $\mathcal{P}(x)$)

Exercice: Ecrire symboliquement les assertions suivantes ainsi que leur négation

a) 0 est un minorant de A

b) (U_n) est croissante

c) $f(x) = 2$ admet une solution sur $\mathbb{R}$

Attention : Lorsqu'un prédicat contient plusieurs variables, l'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs n'est pas anodin :

$\forall x \in E, \exists y \in F, \mathcal{P}(x,y)$ signifie que pour tout x fixé dans E, il existe un élément y de F tel que $\mathcal{P}(x, y)$ est vraie et y dépend donc de x.

$\exists y \in F, \forall x \in E, \mathcal{P}(x,y)$ signifie qu'il existe un élément y de F tel que $\mathcal{P}(x, y)$ est vraie pour toutes les valeurs de x.

Exercices :

① Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Ecrire symboliquement :

a) A est majorée

b) A est bornée

c) A admet un plus petit élément

② Soit la relation: $x + y = x^3 + y^3$ où x et y désignent des réels.

a) Cette relation est-elle toujours vraie?

b) Existe-t-il des valeurs de x et de y pour lesquelles la relation est vraie.

c) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses

$\mathcal{P}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = x^3 + y^3$

$\mathcal{Q}$: $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in R, x + y = x^3 + y^3$

Conseil: Il n'est pas pertinent de faire un usage immodéré des écritures symboliques. Une copie gagne en lisibilité à contenir des phrases écrites en français et surtout on ne mélangera pas les deux types d'écriture.