Exercices - Chapitre 1: Les nombres réels

♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

Ordre sur $\mathbb{R}$ 1.1 On donne $0 < a \leq x \leq b$, $d \leq y \leq c < 0$ et $0 < e \leq z \leq f$. Encadrer les réels suivants

$$\alpha = 4x - 2y \quad \beta = xy \quad \gamma = \frac{x-y}{z} \quad \delta = x^2 + y^2 \quad \varepsilon = \frac{1}{2}x - y^2$$

♥ 1.2 Des classiques.

a. Démontrer rapidement les inégalités suivantes à retenir et à réutiliser:

$$\text{a) } \forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x \quad \text{b) } \forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x \quad \text{c) } \forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$$

♥ 1.3 Inégalités entre les moyennes

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose $m = \frac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$ et $h = \frac{2ab}{a+b}$ a. Montrer que $g \leq m$ puis que $h \leq g \leq m$ b. En déduire $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$

♥ 1.4 Montrer les assertions suivantes

a) Montrer que: $\forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq 1$ b) Montrer que: $\forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq x^k$ c) Montrer que: $\forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq (1-x)^k$ d) Montrer que: $\forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq \left(\frac{1}{4}\right)^k$ En déduire que: $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^n x^k(1-x)^k = 1 + x(1-x) + x^2(1-x)^2 + \dots + x^n(1-x)^n \leq \frac{4}{3}$ 1.5 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + \frac{1}{2} > 0$, puis que $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b < (1+a^2)(1+b^2)$ ♦ 1.6 a) Montrer que pour tous réels x et y on a : $(x+y)^2 \geq 4xy$ b) En déduire que $\forall a, b, c \in]0; +\infty[, (b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$.c) Montrer que $\forall a, b, c \in]0; +\infty[, (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

♦ Reprendre les exercices de révision sur les inégalités

Majorant, minorant, borne sup, borne inf

♥ 1.7 Donner lorsqu'ils existent, les majorants, les minorants, la borne sup, la borne inf le plus petit élément, le plus grand élément des ensembles suivants :

$$\text{a) } [0,1] \quad \text{b) }]0,1] \quad \text{c) }]0,1[\quad \text{d) } \mathbb{N} \quad \text{e) } I = \{x \in \mathbb{R}^* \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\}$$

$$\text{f) } A = \left\{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad \text{g) } B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

1.8 a) Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.Comparer $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$ et $\inf(B)$.b) Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure puis que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.♦ 1.9 $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure :Montrer que $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$ est une partie non vide, majorée de $\mathbb{Q}$ qui n'admet pas de borne supérieure.

Valeur absolue, partie entière

1.10 Traduire les inégalités suivantes en termes d'appartenance à un intervalle que l'on représentera sur la droite réelle :

a) $|x - 1| \leq 2$ b) $|x + 1| < \varepsilon$ c) $|x - a| \leq \frac{1}{2}$ d) $|x + 2a| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

1.11 Représenter sur la droite réelle les parties de $\mathbb{R}$ suivantes et préciser lesquelles sont des intervalles.

a) $|x + 3| > 2$ b) $|2x + 1| < \varepsilon$ c) $|4x - 2| \geq 4$ d) $|x + 1| + |x - 2| > 5$.

♥ **1.12** Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

1.13 Soit x, y deux réels.

Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$

♦ **1.14** Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\|x+2| - |2x-1|\| = \|x+1| - |2x-2|\|$

♥ **1.15** Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{ |x - y|, (x, y) \in A^2 \}$.

Justifier que B est bornée puis calculer $\sup(B)$ et $\inf(B)$, sont-ils respectivement les plus grand et plus petit élément de B ?

♦ **1.16** Démontrer les inégalités suivantes, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

a) $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$. b) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|) \times (1 + |y - 1|)$

♥ **1.17** Représenter graphiquement sur $[-2, 2]$ les fonctions suivantes :

$f_1: x \mapsto \lfloor 2x \rfloor$ $f_2: x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$ $f_3: x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor$

♥ **1.18** Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$

1.19 Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \rfloor = 2$

♥ **1.20** Montrer les égalités suivantes où $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ b) $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

♦ **1.21** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n + 1$

Différents types de raisonnements

♥ **1.22** Montrer par disjonction des cas que pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

1.23 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, a-t-on, $n^2 \leq 2^n$?

♥ **1.24** Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$ ($\mathcal{E}$)

a. **Analyse** : On suppose que x est une solution de ($\mathcal{E}$). Montrer que $x \in]-2 ; 0[$

b. **Synthèse** : Soit $x \in]-2 ; 0[$, x est-il une solution de ($\mathcal{E}$) ?

c. Conclure.