Programme de colles-semaine 1- 18/09 au 22/09

---

0. Eléments de logique et de théorie des ensembles
- Assertion, conjonction logique, implication équivalence
- Ensemble, inclusion, opération sur les parties
- Quantificateurs

I. Nombres réels, inégalités

- Les ensembles de nombres usuels, démonstration par récurrence
- Addition et multiplication dans $\mathbb{R}$.
- Cosinus et sinus d'un réel, formules de trigonométrie (page 2)
- Ordre dans $\mathbb{R}$, manipulation d'inégalités.
- Majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément, borne sup, borne inf.

Théorème admis : $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne sup
- Intervalles de $\mathbb{R}$
- Valeur absolue d'un réel: définition, propriétés, notion de distance dans $\mathbb{R}$
- Partie entière d'un réel : définition, propriétés. Approximations décimales

II Généralités sur les fonctions
- Ensemble de définition, image, antécédent.
- Rep. graphique : Obtention des courbes de $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto af(x)$, $x \mapsto f(ax)$ associées à f, à partir de celle de f.
- Parité, périodicité, minorant, majorant, extremum, sup et inf d'une fonction, Monotonie.

Déroulement de la colle:

① Une formule de trigonométrie du formulaire ci-joint

② Une question de cours parmi

- Ecriture symbolique d'assertions, par exemple pour une partie A de $\mathbb{R}$ et f une fonction
  A admet un plus petit élément, A n'est pas majorée, A est minorée.....
  f est périodique, f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, f est décroissante sur I....
- Définition et caractérisation de la borne supérieure. *Schéma*
- Définition et propriétés de la partie entière d'un réel avec preuves.

③ Un ou deux exercices proches des suivants ou sur les thèmes indiqués :

- Equation / inéquation trigonométrique élémentaire *On illustrera le raisonnement sur le cercle trigo*
- Démonstration par récurrence
- Montrer une inégalité, en étudiant une fonction
- Montrer que $\forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}^*$, $x^k(1-x)^k \leq \left(\frac{1}{4}\right)^k$ puis en déduire que

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leq \frac{4}{3}$

- Déterminer la borne sup et la borne inf de $A = \left\{1+\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$
- Equations/Inéquations avec des valeurs absolues, des parties entières
- Montrer par disjonction des cas que pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Formulaire de trigonométrie ♥

I – Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

II – Relations entre cos, sin

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

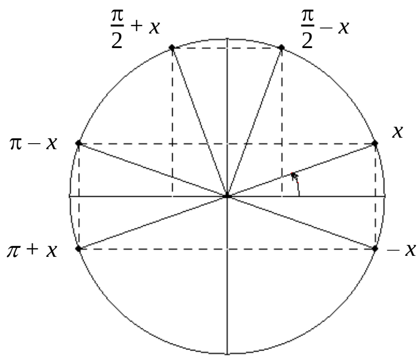
III – Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

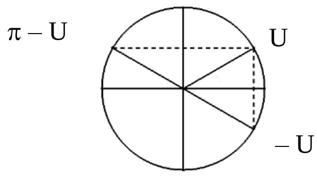
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

IV – Equations trigonométriques :

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les équivalences suivantes :

$$\cos U = \cos V \iff \left(U = V + 2k\pi \ ou \ U = -V + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\sin U = \sin V \iff \left(U = V + 2k\pi \ ou \ U = \pi - V + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$



V – Formules de trigonométrie, révisions :

***Formules d'addition*.**

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

En substituant -b → b, on obtient

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Formules de duplication.

En substituant a → b, on obtient

$\forall a \in \mathbb{R},\quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ (*)$

Linéarisation

On déduit de (*):

$\forall a \in \mathbb{R},\quad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$

$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$