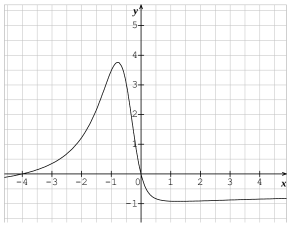
Exercices-Chapitre 2: Généralités sur les fonctions

♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

Fonctions associées

♦ **2.1** Soit une fonction f définie sur ℝ dont on donne la courbe représentative ci-contre. Parmi les six courbes représentatives ci-dessous, identifier celle de :



$f_1 : x \mapsto f(-x)$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto f\left(\frac{x}{3}\right)$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto -f(x)$

$f_4 : x \mapsto f(x-1)$ $\qquad$ $f_5 : x \mapsto f(2-x)$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto \frac{1}{2} f(x)$

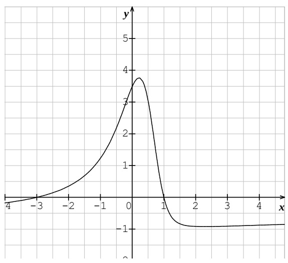


Figure 1

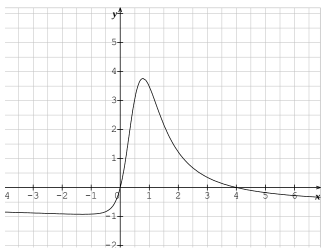


Figure 2

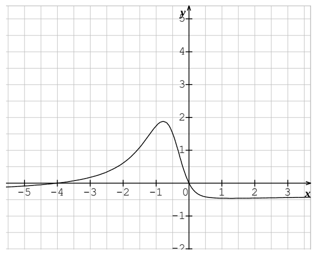


Figure 3

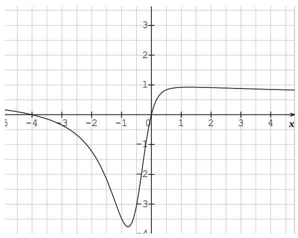


Figure 4

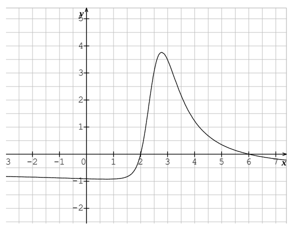


Figure 5

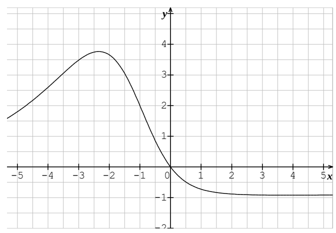


Figure 6

Propriétés globales

♥ **2.2** Montrer que les fonctions suivantes sont bornées sur ℝ, sans utiliser leurs variations :

$f : x \mapsto \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{1+x^2}$ $\qquad$ $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{3+\cos(x)}$ $\qquad$ $h : x \mapsto 2e^{-x^2}+1$

2.3 Compléter le tableau de variations suivants sachant que f est dérivable et impaire sur $\mathbb{R}^*$.

t	-∞	, 0		1		+ ∞
Signe de f '(t)		‖	−	0	+	
Variations de f		‖ + ∞	↘	2	↗	+ ∞

2.4 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2 - périodique et telle que $\forall x \in]0;1]$, $f(x) = 1 - x$.
a. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal sachant que f est continue et paire.
b. Même question avec f impaire.

♥ **2.5** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Indication : Etudier la périodicité de $f : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$

♥ **2.6** On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
b. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$ sans calcul de dérivée.

2.7 Trouver toutes les fonctions périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$.

2.8 Déterminer, s'ils existent, $\sup_I f, \inf_I f, \max_I f, \min_I f$ dans les cas suivants:

a. $f(x) = x^2$ sur $I =]-2, 1]$ b. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ sur $I = [-1, 2[$ c. $f(x) = xe^{-x^2} - 1$ sur $I = \mathbb{R}_+$

♦ **2.9 Parité et opérations**
a. Que peut-on dire de la somme de deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, paires ou impaires ?
b. Que peut-on dire du produit de deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, paires ou impaires ?
c. Que peut-on dire de la composée de deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, paires ou impaires ?

2.10 Soit f une fonction croissante de [0, 1] dans [0, 1].
On considère l'ensemble $\mathcal{E} = \{ x \in [0, 1] , x \leq f(x) \}$.
a. Justifier que $\mathcal{E}$ est non vide puis que $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure $x_0 \in [0, 1]$.
b. Démontrer que $f(x_0) = x_0$.
Ind. on raisonnera deux fois par l'absurde en supposant $f(x_0) < x_0$ puis $f(x_0) > x_0$.

♦ **2.11** Déterminer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x + 1$ et $f(f(x) - 1) = 1 - x$?
Indic : considérer une fonction f vérifiant les hypothèses

♦ **2.12** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.
a. Justifier que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \leq x$.
b. En déduire le sens de variation de f.

Continuité et dérivabilité

♥ **2.13** Etudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

$f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} \text{ si } x \neq 2 \\ 3 \text{ si } x = 2 \end{cases}$ $h : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

2.14 Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$
a. Démontrer que f est continue sur son ensemble de définition
b. Etudier la dérivabilité de f .
c. Mêmes questions pour g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$

♦ **2.15** Montrer que *f* est dérivable sur D puis calculer la dérivée

a. f(x) = $2\cos(3x+\frac{\pi}{4})$ et D = IR

b. f(x) = $\sin\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ et D = IR\{2}

c. f(x) = $\sqrt{x^2+3x+4}$ et D = IR

d. f(x) = $\ln(x^2-2x-3)$ et D =]-∞ ;-1[∪]3 ;∞[

e. f(x) = $e^{-\frac{1}{x}}$ et D = IR*

f. f(x) = $\ln|2x-1|$ et D = IR\{1/2}

♥ **2.16** Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{1+x^2}}$ $\quad g : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $\quad h : x \mapsto \ln(\ln x)$

$u : t \mapsto \sin^2(2t+1)$ $\quad v : t \mapsto \frac{\sin 2t}{\cos 3t}$ $\quad w : t \mapsto \sqrt{|\ln t|}$

$\varphi : x \mapsto \ln|x^2-6x+5|$ $\quad \phi : x \mapsto e^{\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$ $\quad \psi : x \mapsto x^2\ln(x^3+x)$

♥ **2.17** Soit f une fonction définie et dérivable sur IR.

a. Que dire de f ' si f est paire ?

b. Que dire de f ' si f est impaire ?

♥ **2.18** Soit f une fonction dérivable sur I =] -1, 1[.

Donner le domaine de dérivabilité puis la dérivée des fonctions suivantes :

$g : t \mapsto f(2t+1)$ $\quad h : t \mapsto f(t^2)$ $\quad \varphi : t \mapsto f(\frac{1}{t})$

2.19 Soit f définie par f(x) = $\sqrt{x^3(2-x)}$. Déterminer le domaine de définition D de f et les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D.

♥ **2.20** Soit f définie I = -1, +∞[par f(x) = ln(x + 1).

Montrer que, pour tout n∈IN, f est n fois dérivable sur I et expliciter $f^{(n)}(x)$.

♥ **2.21** Etudier la limite en des fonctions suivantes aux bornes du domaine de définition puis préciser la nature des branches infinies de leurs courbes représentatives, si elles existent.

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+x+1} \end{cases}$ b) $g : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+\ln(x) \end{cases}$ c) $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+\sin(x) \end{cases}$ d) $p : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{|x-1|+x} \end{cases}$

Bijections

♥ **2.22** Soit f définie sur IR par ∀x∈IR, f(x) = $\frac{e^x-1}{e^x+1}$

a. Justifier que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

b. Expliciter la bijection réciproque.

♦ **2.23** Soit f définie sur IR\{2} par ∀x≠2, f(x) = $\frac{3x+1}{x-2}$

a. Justifier que f réalise une bijection de IR\{2} sur un intervalle J à préciser.

b. Expliciter la bijection réciproque.

2.24 f est définie sur IR_+^* par ∀x > 0, f(x) = x^2 + lnx.

a. Montrer que f est une bijection de IR_+^* sur un ensemble J à déterminer.

b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1}.
On ne demande pas ici d'expliciter f^{-1}.
c. Donner le tableau de variations de f^{-1}.
d. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 1.
e. Donner l'allure des courbes représentatives des deux fonctions dans un RON.

Etude de fonctions

♦ **2.25** Etudier les fonctions $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ et $g(x) = x + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

Chercher

2.26 Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier l'existence et donner la valeur de $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^n(1-x)$

2.27 a. Soit t fixé dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^2 + tx + 1|$ puis la calculer en fonction des valeurs de t. *On pourra s'appuyer sur une représentation graphique de $f_t : x \mapsto x^2 + tx + 1$*

b. Justifier l'existence et donner la valeur de $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left(\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^2 + tx + 1|\right)$.

c. Etudier l'existence de $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x^2 + tx + 1|\right)$.

Formule à connaître **:**