Fonctions usuelles partie 1

★ Fonction exponentielle

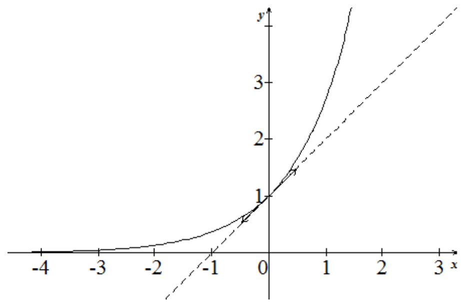
Def : La fonction exponentielle, notée exp, est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$

<u>Propriétés algébrique</u> : $\forall(a, b)\in\mathbb{R}^2$,

- $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$ ce qui justifie la notation $\exp(x) = e^x$ avec $e = \exp(1)$
- $e^{a+b} = e^a e^b$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $(e^a)^n = e^{na}$

<u>Propriétés fonctionnelles :</u>

- La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec avec $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp x$.
- $\exp(0) = 1$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$
- exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$



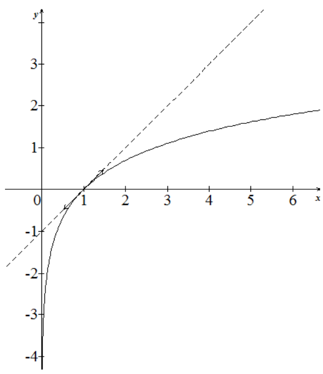
$\forall x\in\mathbb{R}$, $x + 1 \leq e^x$

<u>Quelques limites :</u>

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ *Croissances comparées.*
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$ *taux d'accroissement*

★ Fonction logarithme népérien

Def : D'après le théorème de la bijection, la fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*_+$. Sa bijection réciproque est la <u>fonction logarithme népérien</u> notée ln.



$\forall x > 0$, $\ln(x) \geq x - 1$

<u>Conséquences</u> :

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et $\forall y\in\mathbb{R}^*_+$, $e^{\ln(y)}$ y
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall y\in\mathbb{R}^*_+$, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

<u>Propriétés fonctionnelles</u>

- La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_+$ avec $\ln(1) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$
- La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

<u>Propriétés algébriques</u> :

- $\forall(x, y)\in(\mathbb{R}^*_+)^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\forall x\in\mathbb{R}^*_+, \forall n\in\mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$

<u>Quelques limites :</u>

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \ln x$ *croissances comparées*
- $\dfrac{\ln x}{x - 1} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1 + h)}{h} = \ln'(1) = 1$ *taux d'accroissement*

★ **Fonctions puissances.**

Def : Soit a, b∈ℝ, a > 0, $\boxed{\text{on note } a^b \text{ le réel } e^{b\ln(a)}}$

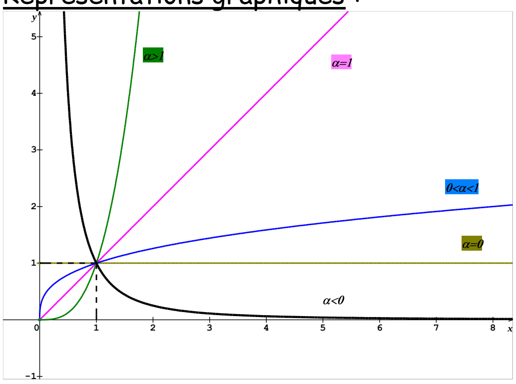
Règles de calcul sur les puissances réelles : Soit x, y∈]0 ;+∞[et a, b∈ℝ.

$x^0 = 1$	$x^a \times x^b = x^{a+b}$	$1/x^a = x^{-a}$	$x^a/x^b = x^{a-b}$
$(xy)^a = x^a \times y^a$		$(x/y)^a = x^a/y^a$	$(x^a)^b = x^{ab}$
$\ln(x^a) = a\ln x$			

Nom	**Puissances réelles**	**Puissances entières**	**Racines nièmes**
Notation	$x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$ $\alpha \in \mathbb{R}$	$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
$I \to f(I)$	$]0,+\infty[\to]0;+\infty[$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ si n est pair $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si n est impair	$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
Parité	×	Paire si n est pair Impaire si n est impair	×
Période	×	×	×
$D_{f'}$	$]0; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$]0 ;+\infty[$
$f'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	nx^{n-1}	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
Monotonie	↗ si $\alpha > 0$ ↘ si $\alpha < 0$ constante si $\alpha = 0$	↗ sur $\mathbb{R}_+$ si n pair ↗ sur $\mathbb{R}$ si n impair	↗

Remarque : Lorsque n est impair, on peut prolonger la fonction racine nième sur ℝ.

Représentations graphiques :



★ **Fonctions du type $x \to u(x)^{v(x)}$**

On se ramène aux fonctions exp et ln en transformant: $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$

★ **Logarithme décimal**

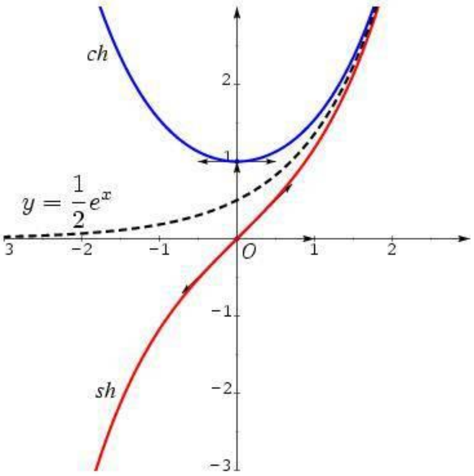
Def : log est définie sur]0 ;+∞[par ∀x > 0, $\log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $x = 10^n \Leftrightarrow n = \log(x)$

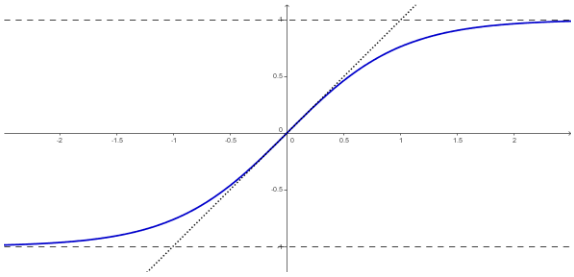
log réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans ℝ et sa bijection réciproque est $x \mapsto 10^x$ qui est la fonction exponentielle de base 10.

★ Fonctions hyperboliques

cosinus et sinus hyperboliques



tangente hyperbolique (*)



Nom	**Cosinus hyperbolique**	**Sinus hyperbolique**	**Tangente hyperbolique (*)**
Notation	ch	sh	th
$I \to f(I)$	$\mathbb{R} \to [1,+\infty[$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \to]-1;1[$
$f(x)$	$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\dfrac{sh(x)}{ch(x)}$
Parité	Paire	Impaire	Impaire
$D_{f'}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f'(x)$	$sh(x)$	$ch(x)$	$1-th^2(x) = \dfrac{1}{ch^2(x)}$
Monotonie	$\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$	$\nearrow$	$\nearrow$

(*) complément

<u>Formules à connaître:</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

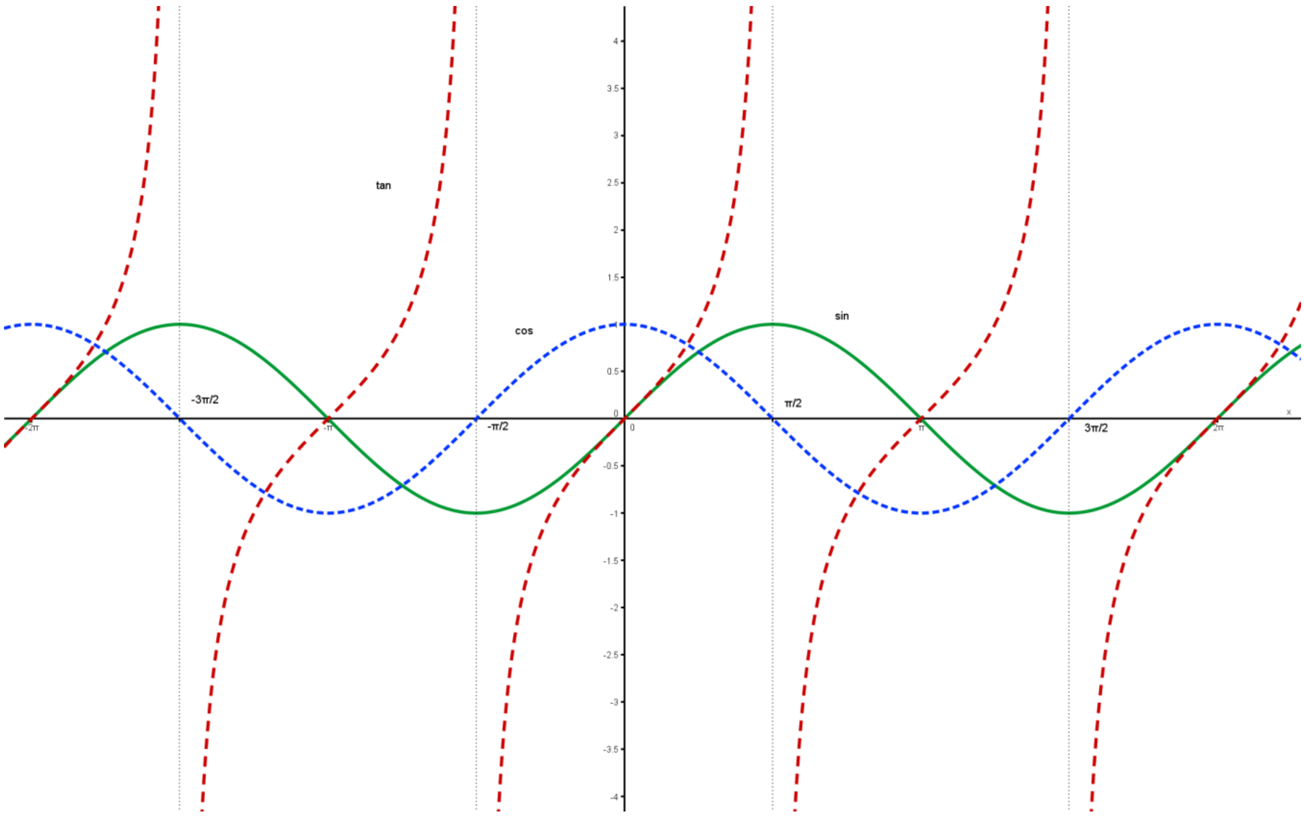
$\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

<u>Limites à connaître :</u> $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{sh(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{th(x)}{x} = 1$ *taux d'accroissement.*

Compléments : [*http://serge.mehl.free.fr/chrono/Lambert.html*](http://serge.mehl.free.fr/chrono/Lambert.html)

★ Fonctions circulaires



Nom	**Cosinus**	**Sinus**	**Tangente**
Notation	cos	sin	tan
$I \to f(I)$	$\mathbb{R} \to [-1;1]$	$\mathbb{R} \to [-1;1]$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$
Parité	Paire	Impaire	Impaire
Période	2π	2π	π
$D_{f'}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$f'(x)$	-sin(x)	cos(x)	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
Monotonie	$\searrow$ sur $[0;\pi]$	$\nearrow$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$\nearrow$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Revoir les formules de trigonométrie.

<u>Inégalités à connaître</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

<u>Limites à connaître</u> : $\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \mapsto 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$ *Taux d'accroissement*