Exercices-Chapitre 3: Fonctions usuelles partie 1
♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

♦ ***Calculs algébriques, inégalités, égalités***

♥ **3.1** Montrer les inégalités suivantes:

a. $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ e^x \geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ b. $\forall t > -1,\ \dfrac{t}{t+1} \leq \ln(1+t) \leq t$

Pour ces deux inégalités, préciser les cas d'égalité

c. $\forall x > 0,\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ *Indic : Utiliser b.*

d. $\forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ \forall\alpha\in]0,1[,\ (1+x)^\alpha < 1+x^\alpha$ e. $\forall x\in]0,1[,\ x^x(1-x)^{(1-x)} \geq \dfrac{1}{2}$

f. $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) \geq 1+\dfrac{x^2}{2}$

3.2 Soit $a, b \in\mathbb{R}$ tels que $0 < a \leq b$ et f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Montrer que f est strictement croissante sur son ensemble de définition et en déduire que

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$$

3.3 Trigonométrie hyperbolique: Soit a et b deux réels
a. Justifier que ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) puis que
sh(a+b) = ch(a)sh(b) + sh(a)ch(b).
b. Donner des formules pour ch(a-b), sh(a-b), ch(2a) et sh(a).
c. Linéariser $\mathrm{ch}^2(a)$ et $\mathrm{sh}^2(a)$.
d. Transformer ch(a) + ch(b) en produit.

Equations, inéquations

♥-♦ **3.4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\ln|x-1| + \ln|x+3| = \ln|3x^2 - 4x + 1|$ b. $e^x - 3e^{-x} = 4$

c. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2}+3^{x+2}$ d. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ e. $3^x + 4^x = 5^x$

♦ **3.5** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : $\begin{cases} x+y=7 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} e^x e^{2y}=a \\ 2xy=1 \end{cases}$ où $a\in\mathbb{R}$.

3.6 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $5\mathrm{ch}(x) - 4\mathrm{sh}(x) = 3$ b. $\mathrm{ch}(x) \geq 2$ c. $\begin{cases} \mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(y)=4 \\ \mathrm{sh}(x)+\mathrm{sh}(y)=1 \end{cases}$

♦ **3.7** Déterminer les valeurs des réels a et b pour lesquelles le système (S): $\begin{cases} \mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(y)=a \\ \mathrm{sh}(x)+\mathrm{sh}(y)=b \end{cases}$

admet des solutions dans $\mathbb{R}^2$.

♥ **3.8** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

a. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\le\frac{1}{2}$ b. $2\cos^2(2x)-3\cos(2x)=-1$ c. $\tan x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

d. $\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ e. $\tan(x)\tan(2x)=1$ f. $\cos x > \cos\frac{x}{2}$ sur $[0, 2\pi[$

g. $\cos(x)+\cos(2x)\ge 0$

Propriétés globales

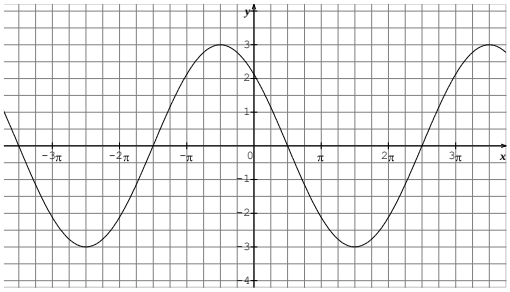
3.9 Donner l'ensemble de définition puis étudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes et en déduire un intervalle d'étude possible.

$f(t)=\sin^2(t)\cos(2t)$ $g(t)=\frac{1}{\cos t+\cos(2t)}$

♥ **3.10** Etudier la périodicité des fonctions suivantes

$g_t : x\mapsto A\cos(\omega t-kx+\varphi)$ $g_x : t\mapsto A\cos(\omega t-kx+\varphi)$

♥ **3.11** Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction définie par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ avec A, ω et $\varphi\in\mathbb{R}$. On donne, ci-dessous, la représentation graphique de f. Déterminer les réels A, ω et φ.



Etude de fonctions:

3.12 Etudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=x^2\sqrt{|\ln x|}$ si $x>0$ et $g(0)=0$

3.13 Etudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes : $f : t\mapsto 3\cos(2t+\frac{\pi}{3})$ et $g : x\mapsto \cos^2 x-\cos x+1$

♦ **3.14** On considère la fonction : $f : x\mapsto -2\frac{\sin^3 x}{\cos x}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f. On notera D ce domaine.
Montrer que : $\forall x\in D$, $f(x)=\sin(2x)-2\tan(x)$
b. Etudier la fonction f et tracer l'allure de sa courbe représentative.

♥ **3.15** ***Fonction u^v***
a. Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

$f : x\mapsto (3x^2)^x$ $g : x\mapsto (\cos x)^x$ $u : x\mapsto (\ln x)^{\sqrt{x}}$ $v : x\mapsto (\tan x)^{x^2}$

b. Etudier les fonctions suivantes :

$u(x)=x^x$ $v(x)=x^{\frac{1}{x}}$ ♦ $w(x)=(1+\frac{1}{x})^x$

3.16 Soit I un intervalle et f définie sur I par $\forall x\in I$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

a. Déterminer I sachant que I est le plus grand intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0 sur lequel on peut définir f.
b. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
c. Donner l'allure de la courbe représentative de f et de f^{-1}.
d. Préciser le domaine de dérivabilité et la dérivée de f^{-1}.

Raisonner

♥ **3.17** a. Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

b. Trouver tous les entiers n et m strictement positifs et distincts tels que $n^m = m^n$
c. Discuter suivant les valeurs de $n\in\mathbb{N}^*$, le nombre de solutions de $e^x = x^n$

♦ **3.18** Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^6 + x^4 = 810$

♦ **3.19** Soit a et b des réels tels que $0 < a < b$.
Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$

♥ **3.20** Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ et vérifiant la propriété :

$\mathcal{P} : \forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$

"It's important to learn math because someday you might accidentally buy a phone without a calculator."