Formulaire de trigonométrie ♥

I – Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

II – Relations entre cos, sin et tan

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$ $\qquad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

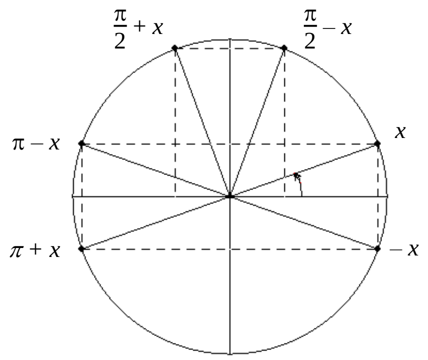
III – Angles associés

Une lecture <u>efficace</u> du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= \cos x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos x\\ \sin(\pi - x) &= \sin x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= -\cos x\\ \sin(\pi + x) &= -\sin x\end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x\\ \sin(-x) &= -\sin x\end{aligned}}$$

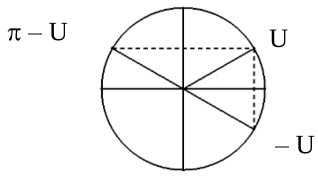
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x + 2\pi) &= \cos x\\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x\end{aligned}}$$

IV – Equations trigonométriques :

$\cos U = \cos V \iff (U = V + 2k\pi \text{ ou } U = -V + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$

$\sin U = \sin V \iff (U = V + 2k\pi \text{ ou } U = \pi - V + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$

$\tan U = \tan V \iff (U = V + k\pi\ , k \in \mathbb{Z})$



V – Formules d'addition et de duplication

Formules d'addition.

$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Lorsque tan $(a + b)$ existe,
$\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Formules de duplication.

$\forall\ a \in \mathbb{R},$ $\quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

Lorsque cela a un sens, on a : $\tan(2a) = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

On en déduit :

$\forall\ a \in \mathbb{R},$ $\quad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$

$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$

VI – Formule de Moïvre :

$$\boxed{\forall\ \theta \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

VII- Transformation de produit en somme:

$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

VIII- Transformation de somme en produit:

$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$\cos a+\cos b = 2\cos(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$$

$$\sin a+\sin b = 2\cos(\frac{a-b}{2})\sin(\frac{a+b}{2})$$

$$\cos a-\cos b = -2\sin(\frac{a-b}{2})\sin(\frac{a+b}{2})$$

$$\sin a-\sin b = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$$

IX – Utilisation de l'angle moitié

- $\forall a\in\mathbb{R},\quad 1+\cos a = 2\cos^2(\frac{a}{2})$ et $1-\cos a = 2\sin^2(\frac{a}{2})$

- Soit $a\in\mathbb{R}$, on pose, sous réserve d'existence, $t=\tan(\frac{a}{2})$ on a

$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$ et sous réserve d'existence, $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

X – Transformation de *a*cos*x* + *b*sin*x*

On pose $Z = a+ib$, et $\boxed{r=\sqrt{a^2+b^2}}$, on a $Z = re^{i\theta}$ et donc $a\cos x + b\sin x = r(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x) = r\cos(x-\theta)$

Exemple: $\cos x+\sin x = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x) = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$