Equation du second degré à coefficients réels ou complexes.

On considère l'équation $\boxed{az^2 + bz + c = 0}$ d'inconnue z où a, b, c$\in\mathbb{C}$ et $a\neq0$

① **Résolution de l'équation**

★ **Résolution dans $\mathbb{C}$, cas général**:

On calcule le discriminant de l'équation Δ **= b² - 4ac. Δ est un <u>nombre complexe</u>**.
On distingue alors deux cas:

1er cas: $\Delta = 0$ l'équation admet une unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$

2ème cas: $\Delta \neq 0$ l'équation admet deux solutions distinctes $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$

où δ est <u>une</u> racine carrée complexe de Δ.

Retenons que dans tous les cas, az²+bz+c=0 admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

★ **Résolution dans $\mathbb{C}$, cas où a, b, c$\in\mathbb{R}$, $a\neq0$**
On calcule le discriminant de l'équation **Δ=b²-4ac. Δ est un <u>nombre réel</u>**.
On distingue alors trois cas:

1er cas: $\Delta = 0$ l'équation admet une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

2ème cas: $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

3ème cas: $\Delta < 0$ l'équation admet deux solutions complexes conjuguées:
$z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

★ **Résolution dans $\mathbb{R}$, cas où a, b, c$\in\mathbb{R}$, $a\neq0$**
On calcule le discriminant de l'équation Δ=b²-4ac. Δ est un <u>nombre réel</u>.
On distingue alors trois cas:

1er cas: $\Delta = 0$ l'équation admet une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

2ème cas: $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

3ème cas: $\Delta < 0$ l'équation n'admet pas de solutions réelles.

② **Somme et produit des racines**

Dans le cas où l'équation admet deux solutions notées z_1 et z_2 ou une seule solution z_0 que l'on considère comme une solution double ($z_1 = z_2$).

On a $\boxed{S = z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a} \text{ et } P = z_1z_2 = \dfrac{c}{a}}$

Applications:
- Résoudre directement l'équation si on voit une solution évidente.
- Résolution de $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \Leftrightarrow$ x et y sont solutions de z²-Sz+P=0

③ **Factorisation de az²+bz+c.**

az²+bz+c = 0 a deux solutions z_1 et $z_2 \Leftrightarrow az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$
az²+bz+c = 0 a une unique solution $z_0 \Leftrightarrow az^2 + bz + c = a(z-z_0)^2$

④ **Complément : utilisation du discriminant réduit:**

utile en physique

On pose **$b = 2b'$**, l'équation s'écrit $az^2+2b'z+c = 0$.
On a alors $\Delta = b^2-4ac = (2b')^2-4ac = 4(b'^2-ac)$.
$\boxed{\Delta' = b'^2-ac}$ **est le discriminant réduit** de l'équation.
On a $\Delta = 4\Delta'$ et si δ' est une racine carrée de Δ' alors $2\delta'$ est une racine carrée de Δ.

En remplaçant dans les formules précédentes, on obtient:

★ **Cas général: $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$.**

1[er] cas: $\Delta'=0$ l'équation admet une unique solution $z_0=-\dfrac{b'}{a}$

2[ème] cas: $\Delta'\neq 0$ l'équation admet deux solutions distinctes $z_1=\dfrac{-b'-\delta'}{a}$ et $z_2=\dfrac{-b'+\delta'}{a}$

★ **Cas où les coefficients sont réels: $a,b\ c$ réels et $a\neq 0$.**

1[er] cas: $\Delta'=0$ l'équation admet une unique solution réelle $x_0=-\dfrac{b'}{a}$

2[ème] cas: $\Delta'>0$ l'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

3[ème] cas: $\Delta<0$ l'équation admet deux solutions complexes conjuguées: $z_1=\dfrac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}$ et

$z_2=\dfrac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}$