Racines nièmes d'un nombre complexe

① Racines carrées d'un nombre complexe.

Soit $a\in\mathbb{C}$, les racines carrées de a sont les solutions de $z^2 = a$
1er cas: a = 0. $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ donc la racine carrée de 0 est 0
2ème cas: $a \neq 0$, l'équation $z^2=a$ possède deux solutions appelées racines carrées complexes de a, opposées l'une de l'autre.

Méthode 1: On écrit a sous forme trigonométrique: $a = re^{i\theta}$ et on cherche z sous la même forme:

$$z^2 = a \Leftrightarrow (\rho e^{i\alpha})^2 = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho^2 = r\\ 2\alpha = \theta + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho = \sqrt{r}\\ \alpha = \dfrac{\theta}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

On en déduit que les racines carrées complexes de a sont $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Méthode 2: On écrit a sous forme algébrique: $a = \alpha+i\beta$ et on cherche z sous la même forme:

$$z^2=a \Leftrightarrow (x + iy)^2=\alpha+i\beta \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=\alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=\alpha\\ 2xy=\beta\end{cases}$$ Et on a $\left|z^2\right| = \left|a\right| \Leftrightarrow x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

On résout alors $\begin{cases}x^2-y^2=\alpha\\ x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\end{cases}$ avec xy du signe de β ce qui nous donne les deux racines.

Remarque : Si on voit facilement que $a = b^2$ alors les racines carrées complexes de a sont b et -b.

② Racines nièmes de 1

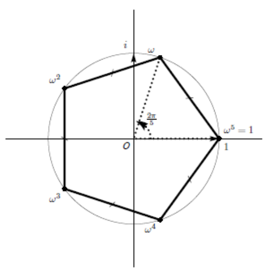
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2$. L'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions dans $\mathbb{C}$ appelées racines nièmes de 1. On note leur ensemble $\mathbb{U}_n$.

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \{z\in\mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{e^{i2k\pi/n},\ k\in[\![0, n-1]\!]\} = \{1, \omega, \omega^2,\dots, \omega^{n-1}\} \text{ avec } \omega = e^{i2\pi/n}}$$

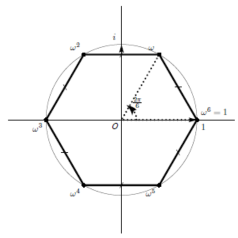
A connaître: $\mathbb{U}_2 = \{1;-1\}$ $\qquad$ $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{i2\pi/3}$ $\qquad$ $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$

Les images des éléments de $\mathbb{U}_n$ dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés de centre O, inscrit dans le cercle trigonométrique, avec (Ox) comme axe de symétrie.

- $\mathbb{U}_5 = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$



- $\mathbb{U}_6 = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5\}$ avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{6}}$



$$\boxed{S = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0}$$ donc, en particulier $1 + j + j^2 = 0$ et $$\boxed{P = \prod_{k=0}^{n-1}\omega^k = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{n-1}}$$

③ Racines nièmes d'un nombre complexe

Soit $a\in\mathbb{C}$ et $n \geq 2$, les racines nièmes de a sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^n = a$.
1er cas: a = 0: $z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$ donc la seule racine nième de 0 est 0.
2ème cas: $a \neq 0$: l'équation $z^n = a$ possède exactement n solutions appelées racines nièmes de a.

Mode de calcul: On écrit a sous forme exponentielle : $a = re^{i\theta}$, on pose $\alpha = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$

$z^n = a \Leftrightarrow z^n = \alpha^n \Leftrightarrow (z/\alpha)^n = 1 \Leftrightarrow (z/\alpha)\in\mathbb{U}_n$ d'où $\boxed{S = \{\alpha, \alpha\omega,\dots,\alpha\omega^{n-1}\} = \{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k\in[\![0, n-1]\!]\}}$