

## Exercices-Chapitre 4: Nombres complexes et applications

♥ A savoir refaire - ♦ Corrigés

## ♥ Calcul sur les nombres complexes

4.1 Donner la forme algébrique des nombres suivants:

$$a = (3 + 4i)^3 - (7 - 2i)^2 \quad b = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \quad c = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 \quad d = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

$$e = \left(-\frac{i}{3}\right)^3 + \left(\frac{3-i}{2}\right)^2 \quad f = \overline{i(4-2i)^2} \quad g = \overline{\left(\frac{i\sqrt{3}}{1+6i}\right)}$$

4.2 Soit  $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$  et  $z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2}$ , calculer:

$$z_1 + z_2, \quad z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad 1 + z_1^2, \quad \frac{\overline{z_1}}{z_2}, \quad \frac{z_1^2}{z_2}$$

4.3 Calculer les inverses des nombres suivants

$$a = 1 + \frac{1+i}{1-2i} \quad b = i - \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad c = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4.4 Soit  $x$  un réel, donner les parties réelles et imaginaires de

$$(x-2i)^2 \quad (x+i)^3 \quad (1+ix)(1-ix) \quad \frac{x+i}{x-i} \quad \frac{x+2i}{ix+1}$$

Même question pour  $\frac{2+\overline{z}}{1-z}$  où  $z$  est un complexe différent de 1.4.5 Déterminer les valeurs des réels  $a$  et  $b$  pour que  $z = (2a - b - i(a + b))(-a - i(a + b))$  soit réel.4.6 Démontrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)i^k = 1 + 2i + 3i^2 + \dots + ni^{n-1} = \frac{1}{2}[-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i].$$

En déduire une expression simple de:

$$S_1 = 1 - 3 + 5 - \dots + (-1)^p(2p+1) \text{ et } S_2 = 2 - 4 + 6 - \dots + (-1)^{p-1}(2p) \text{ où } p \in \mathbb{N}.$$

## Conjugué, module:

4.7 Résoudre dans  $\mathbb{C}$ 

$$a) 2z + 6\overline{z} = 3 + 2i \quad b) z^5 = \overline{z} \quad c) |z| + z = 3 + 4i \quad d) |z| = \frac{1}{|z|} = |z-1|$$

4.8 Soit  $u$  et  $v \in \mathbb{C}$  tels que  $uv \neq -1$ , montrer que:  $u$  et  $v \in \mathbb{U} \Rightarrow \frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$ .

La réciproque est-elle vraie?

4.9 Soit  $u \in \mathbb{C} - \{1\}$ , montrer que:  $\frac{z - u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$  ou  $u \in \mathbb{U}$ 4.10 Soit  $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$ , montrer que:  $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, z = \frac{1+ix}{1-ix}$

♥ 4.11 Démontrer que  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$

♦ 4.12 Soit  $u$  et  $v \in \mathbb{C}$ , démontrer que:

$$|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v| \quad \text{et} \quad |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

4.13 Démontrer que  $\sup_{|z| \leq 1} |z^3 + 2iz| = \sup \{ |z^3 + 2iz|, z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1 \} = 3$

### Forme exponentielle

♥ 4.14 Soit  $\theta$  un réel et les complexes  $z_1 = 1 + e^{i\theta}$  et  $z_2 = 1 - e^{i\theta}$ .

Donner le module et un argument de  $z_1$  et  $z_2$  dans les cas suivants :

a)  $\theta \in [-\pi, \pi]$       b)  $\theta \in [0, 2\pi]$       c)  $\theta \in \mathbb{R}$ .

♥ 4.15 Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants sachant que  $\alpha \in ]-\pi; \pi[$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

a)  $\frac{(\sqrt{3}-i)^2}{(1-i)^3}$       b)  $\left( \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}} \right)^3$       c)  $(1+i\sqrt{3})^{2013} - (1-i\sqrt{3})^{2013}$   
 d)  $-4(\cos\alpha + i\sin\alpha)$       e)  $3(-\sin\alpha - i\cos\alpha)$       f)  $1 + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$   
 g)  $\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha}, \alpha \neq 0$       h)  $\left( \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} \right)^n$       i)  $1 + i\tan\alpha$  avec  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

♦ 4.16 Soit  $a$  et  $b \in \mathbb{U}$ , montrer que  $\frac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}^+$ , la réciproque est-elle vraie?

4.17 Trouver tous les entiers naturels  $n$  tels que  $\left( \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2} \right)^n \in \mathbb{R}^+$

♥ 4.18 Ecrire  $(-1+i)^{17}$  sous forme algébrique.

♦ 4.19 On pose  $z = -\sin(2\theta) + 2i \cos^2 \theta$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ .

1. Suivant les valeurs de  $\theta$ , trouver le module et un argument de  $z$ .

2. Pour quelle(s) valeur(s) de  $\theta$ ,  $z$  et  $1-z$  ont-ils le même module ?

### Equations de degré $n$ dans $\mathbb{C}$ .

♥ 4.20 Résoudre dans  $\mathbb{C}$ :

a)  $z^2 + 3iz + i - 3 = 0$       b)  $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$       c)  $z^2 + z - (1+3i) = 0$

d)  $\begin{cases} x+y=1+i \\ xy=2-i \end{cases}$

♥ 4.21 Résoudre dans  $\mathbb{C}$

a)  $z^8 = 1$       b)  $z^6 = -1$       c)  $z^4 = 1 - i$       d)  $(z+1)^3 = i$

e) Calculer  $(1+2i)^4$  puis résoudre  $z^4 = -7 - 24i$

4.22 Résoudre dans  $\mathbb{C}$

a)  $z^4 + z^2 + 1 = 0$       b)  $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

4.23 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

a)  $z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = 0$       On cherchera deux solutions évidentes

b)  $2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = 0$       On cherchera une solution réelle

♦ c)  $iz^3 + (2i-1)z^2 - (i+4)z + 3(2i-1) = 0$       On cherchera une solution imaginaire pure

♥ 4.24 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , résoudre dans  $\mathbb{C}$

a)  $z^n = 1 + i$     b)  $(z + 1)^n = (z - 1)^n$     ♦ c)  $(z + i)^n = (z - i)^n$     d)  $\sum_{k=0}^n z^{2k} = 0$

♥ 4.25 Soit  $\theta$  un réel, résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$

En déduire les solutions de  $z^{2n} - 2z^n \cos \theta + 1 = 0$  où  $n \in \mathbb{N}^*$

♦ 4.26 Résoudre dans  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ ,  $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$

♥ 4.27 Soit  $\omega = e^{\frac{2\pi}{7}}$ ,  $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$  et  $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

a) Calculer  $A + B$  puis  $AB$ .

b) En déduire les valeurs exactes de  $A$  et de  $B$  sous la forme  $\frac{a+i\sqrt{b}}{c}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{Z}$

### Application à la trigonométrie

♥ 4.28 Mettre sous forme exponentielle  $\frac{(1+i \tan \alpha)^2}{1+\tan^2 \alpha}$  où  $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$     *Formule de trigo...*

♥ 4.29 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes

a)  $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$     b)  $3 \cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$     c)  $\sin 3x + \sin 5x \geq 0$

d)  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3}$     e)  $\cos x - \sin x > 1$

♦ 4.30 Montrer que  $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0 \\ \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0 \end{cases}$

4.31 Calculer  $S = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$

♦ 4.32 Calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$  en utilisant des formules du cours.

En déduire une simplification de  $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$

4.33 Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , montrer que  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a \cos x + b \sin x \end{cases}$  admet un minimum et un maximum.

