

Programme de colles-semaine 5- 16/10 au 20/10

I. Nombres complexes:

- $\mathbb{C} = \{a+ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $i^2 = -1$, plan complexe.
 - Addition et multiplication dans \mathbb{C} , égalité de Bernoulli, $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$
 - Conjugué, module, double inégalité triangulaire.
 - Groupe des complexes de module 1, notation e^{ia} , formule d'Euler et de Moivre, factorisation de $1 + e^{ia}$ et de $1 - e^{ia}$
 - Application à la trigonométrie : transformation de produit en somme, de somme en produit et utilisation de l'angle moitié, factorisation de $a \cos x + b \sin x$ en $R \cos(x - \theta)$
 - Exponentielle d'un nombre complexe.
 - Equation du 2nd degré: racines carrées complexes, résolution de $az^2 + bz + c = 0$, somme et produit des racines.
 - Racines nièmes de 1 puis d'un nombre complexe.
 - Equations polynomiales de degré $n \geq 2$, autres équations.
 - Fonctions à valeurs complexes
-

① Une nouvelle formule de trigonométrie (cf fiche en page 2)

② Une question de cours parmi

- Double inégalité triangulaire et preuve.
- Factorisation de $1 + e^{ia}$ et de $1 - e^{ia}$ avec justification, en déduire le module et un argument pour $a \in]-\pi, \pi]$
- Définition, description et représentation dans le plan complexe des racines nièmes de 1.
On distinguera les cas n pair et n impair pour la représentation.

③ Exercices sur les nombres complexes.

On pourra commencer par des calculs ou des résolutions d'équations polynomiales.

Pas d'application à la géométrie.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

VII- Transformation de produit en somme:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

VIII- Transformation de somme en produit:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

IX – Utilisation de l'angle moitié

$$\bullet \forall a \in \mathbb{R}, \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \text{ et } 1 - \cos a = 2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\bullet \text{ Soit } a \in \mathbb{R}, \text{ on pose, sous réserve d'existence, } t = \tan\left(\frac{a}{2}\right) \text{ on a}$$

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\text{et sous réserve d'existence, } \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

X – Transformation de $a \cos x + b \sin x$

On pose $Z = a+ib$, et $R = \sqrt{a^2+b^2}$, on a $Z = R e^{i\theta}$ et donc $a = R \cos \theta$ et $b = R \sin \theta$

On met R en facteur dans Z : $a \cos x + b \sin x = R(\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) = R \cos(x - \theta)$

Exemple: $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$