

## Programme de colles-semaine 6- 06/11 au 10/11

---

### I. Nombres complexes:

- $\mathbb{C} = \{a+ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  et  $i^2 = -1$ , plan complexe.
- Addition et multiplication dans  $\mathbb{C}$ , égalité de Bernoulli,  $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$
- Conjugué, module, double inégalité triangulaire.
- Groupe des complexes de module 1, notation  $e^{ia}$ , formule d'Euler et de Moivre, factorisation de  $1 + e^{ia}$  et de  $1 - e^{ia}$
- Application à la trigonométrie : transformation de produit en somme, de somme en produit et utilisation de l'angle moitié, factorisation de  $a \cos x + b \sin x$  en  $R \cos(x - \theta)$
- Exponentielle d'un nombre complexe.
- Equation du 2<sup>nd</sup> degré: racines carrées complexes, résolution de  $az^2 + bz + c = 0$ , somme et produit des racines.
- Racines nièmes de 1 puis d'un nombre complexe.
- Equations polynomiales de degré  $n \geq 2$ , autres équations.
- Fonctions à valeurs complexes

### II. Calculs de sommes et de produits

- La notation  $\sum_{k \in E} a_k$ , où  $E$  est un ensemble fini d'indices et  $(a_k)$  une famille de complexes

Propriétés, sommes à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, séparation des termes d'indice pairs et impairs, télescopage.

La notation  $\prod_{k \in E} a_k$ , où  $E$  est un ensemble fini d'indices et  $(a_k)$  une famille de complexes.

Propriétés, produit à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, télescopage.

- Coefficients binomiaux, définition et propriétés. Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie.
- 

### Déroulement de la colle:

① Donner sans justifier la valeur d'une ou deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k, \sum_{k=1}^n k^2, \sum_{k=1}^n k^3, \sum_{k=0}^n q^k, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

② Une question de cours parmi

- Définition, description et représentation des racines nièmes de 1. Démontrer que leur somme est nulle.
- Démonstration de la formule du binôme de Newton
- Calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et de  $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$

③ Calculer une somme ou un produit

*Quelques exemples traités en classe page 2*

④ Exercices autour du second degré et des racines nièmes dans  $\mathbb{C}$ .

*Toujours pas d'application à la géométrie.*

---

**Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10**

Calculs faits en classe

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k(n+1-k)$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{3^k}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{3^{k-1}}$$

$$S_4 = \sum_{k=3}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^n k \times k!$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Ecrire avec des factorielles :  $\prod_{k=1}^n (2k)$  et  $\prod_{k=0}^n (2k+1)$

$$P_1 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$P_2 = \prod_{k=0}^n 2^k 3^{-k}$$

$$P_3 = \prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$$

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k$$

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$$

$$C = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}$$

$$D = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

$$E = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k}$$

En utilisant la relation :  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ , calculer  $S_1 = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$  et  $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$