Chapitre 5: Calcul de sommes et de produits-polycopié de cours

1. Calcul de sommes

1.1 le symbole $\sum$

Déf: Soit $(a_k)_{k\in E}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E
On note $\sum_{k\in E} a_k$ la somme de tous les éléments de la famille.

Remarque : l'indice k est muet, ainsi, $\sum_{k\in E} a_k = \sum_{i\in E} a_i = \sum_{j\in E} a_j = \cdots$

Convention : Si E = $\varnothing$ alors $\sum_{k\in E} a_k = 0$

✍ Cas particuliers usuels:

★ Si E = $[\![0, n]\!]$ où $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

★ Si E = $[\![1, n]\!]$ où $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

★ Si E = $[\![p, n]\!]$ où n et $p\in\mathbb{Z}$, $p \le n$, $\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n$ et si $p > n$, $\sum_{k=p}^{n} a_k = 0$ par convention.

Propriétés: Soit n, $p\in\mathbb{Z}$ avec $p \le n$,

- $\sum_{k=p}^{n+1} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_k + a_{n+1}$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$, $1 \le p \le n$ $\qquad$ $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k$
- $\sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k = \sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k)$ $\qquad$ et $\qquad$ $\sum_{k=p}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k$ $\qquad$ *linéarité de la somme*

1.2 Sommes à connaître:

① Somme de termes constants:

$\forall a\in\mathbb{C}, \forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a$ $\qquad$ et $\qquad$ $\forall a\in\mathbb{C}, \forall n, p\in\mathbb{Z}, p \le n, \sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$

② Somme des entiers, des carrés des entiers, des cubes des entiers :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

③ Sommes des termes d'une suite géométrique :

On a déjà vu : $\forall q\in\mathbb{C}, \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ si $q\neq 1$, $(n+1)$ sinon

On en déduit : Soit u une suite géométrique de raison $q\neq 1$, $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Application : $\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$, $(n - p + 1)$ sinon.

④ **Sommes des termes d'une suite arithmétique :**

Soit u une suite arithmétique de raisons r, $\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = \dfrac{u_p + u_n}{2}(n-p+1) = \dfrac{(2u_p + (n-p)r)}{2}(n-p+1)}$

⑤ **Formule de Bernoulli** : $\boxed{\forall a,b \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \cdots = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$

1.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice** : Soit $n, p \in \mathbb{Z}$, $n \leq p$

a. Translation: Soit $S = \sum_{k=p}^{n} a_k$, on pose j = k - p, on a k = j + p et $S = \sum_{j=0}^{n-p} a_{j+p}$.

Comme l'indice est muet, on peut écrire $S = \sum_{k=0}^{n-p} a_{k+p}$. On dit qu'on a changé k en k + p ($k \leftarrow k + p$).

b. Symétrie: Soit $S = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$, le changement d'indice j = n - k donne $S = \sum_{j=0}^{n} a_j$ et comme l'indice est muet on peut écrire que: $S = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On a changé n-k en k ($k \leftarrow n$-k).

② **Sommation par paquets :**
Dans certains calculs, regrouper les termes par paquets permet de faire des simplifications. On peut, en particulier, regrouper les termes d'indices pairs et d'indices impairs :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ pair}}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ impair}}}^{n} a_k = \sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{m \leq 2k \leq n} a_{2k} + \sum_{m \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1}$$

③ **Somme télescopique :**
Une somme télescopique est une somme pouvant s'écrire sous la forme:

$S_1 = \sum_{k=p}^{n} \left(a_{k+1} - a_k\right)$ ou $S_2 = \sum_{k=p}^{n} \left(a_k - a_{k+1}\right)$.

Dans ce cas on a les simplifications respectives :

$S_1 = a_{n+1} - a_p$ $\qquad\qquad$ $S_2 = a_p - a_{n+1}$

---

2. Produits

2.1 le symbole $\prod$

Déf: Soit $(a_k)_{k \in J}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E.

On note $\prod_{k \in E} a_k$ le produit de tous les éléments de la famille.

Remarque : l'indice k est muet, ainsi, $\prod_{k \in J} a_k = \prod_{i \in J} a_i = \prod_{j \in J} a_j = \cdots$

Convention : Si E = $\varnothing$ alors $\prod_{k \in E} a_k = 1$

Cas particuliers usuels:

★ Si E = $[\![0, n]\!]$ où $n\in\mathbb{N}$, $\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \ldots \times a_n$

★ Si E = $[\![1, n]\!]$ où $n\in\mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$

★ Si E = $[\![p, n]\!]$ où n et $p\in\mathbb{Z}$, $p\leq n$, $\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \ldots \times a_n$ et si p > n, $\prod_{k\in E} a_k = 1$ par convention.

Propriétés immédiates: On donne n, p, m entiers, $p\leq m\leq n$ et α,λ des réels.

- $\exists k\in E, a_k = 0 \Rightarrow \prod_{k\in E} a_k = 0$
- $\prod_{k=p}^{n+1} a_k = a_{n+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$ $\qquad \prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{m} a_k \prod_{k=m+1}^{n} a_k$
- $\prod_{k=p}^{n} a_k \cdot \prod_{k=p}^{n} b_k = \prod_{k=p}^{n} a_k b_k$ $\qquad \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)^{\alpha} = \prod_{k=p}^{n} (a_k)^{\alpha}$ $\qquad \prod_{k=p}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$

2.2 Produits à connaître:

① **Produit de facteurs constants.** Soit a un nombre complexe, $\boxed{\prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1}}$

② **Factorielle (de) n** : Soit n un entier naturel, n ≥ 1, la factorielle de n est l'entier :

$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots n$

Par convention, on pose $0! = \prod_{k=0}^{n} k = 1$. On a $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, (n + 1)! = (n + 1) \times n!}$

3.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice**: Même chose que pour les sommes.

② **Produit télescopique**: Un produit télescopique est un produit de facteurs pouvant s'écrire sous la forme: $P = \prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ou $P = \prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

On a alors après simplification $P = \frac{a_{n+1}}{a_p}$ et $P = \frac{a_p}{a_{n+1}}$.

---

3. Formule du binôme et applications

3.1 Les coefficients binomiaux :

Def : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$, le coefficient binomial « k parmi n » est l'entier naturel défini par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $0 \leq k \leq n$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$

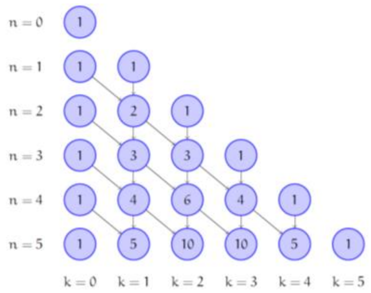
Propriété: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

① $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ en particulier: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

② $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *relation de Pascal*

③ Si $1 \le k \le n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ *formule du capitaine*

Application: triangle de Pascal : La valeur dans une case s'obtient en addditionnant la valeur de le case au dessus et celle de la case au-dessus à gauche



Remarque : On peut montrer que lorsque $k \in [\![0, n]\!]$, la formule définissant $\binom{n}{k}$ donne bien un entier naturel, en raisonnant par récurrence sur n (numéro de la ligne dans le triangle).

3.2 Formule du binôme de Newton:

Théorème 5.1 : Soit a et $b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Dans la pratique: On utilise le triangle de Pascal pour obtenir les coefficients.

3.3 Des applications

① **Calcul de sommes** :

A retenir : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

② **Transformation d'expressions trigonométriques**

★ Linéarisation de $\cos^p \sin^q$: On utilise les formules d'Euler puis on développe en utilisant la formule du binôme, enfin on regroupe les termes pour faire apparaître des cos(*ka*) et sin(*ka*) grâce aux formules d'Euler.

Exemples : $\cos^3 a = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\cos(3a) + \frac{3}{4}\cos a$ et $\sin^3 a = \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{4}\sin(3a) + \frac{3}{4}\sin a$

★ Délinéarisation de cos(px) ou de sin(qx) : On utilise la formule de Moïvre puis on développe le membre de gauche en utilisant la formule du binôme puis on identifie les parties réelles et imaginaires. Exemples: $\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$ et $\sin(3a) = -4\sin^3 a + 3\sin a$

4. Sommes doubles

On considère une famille de nombres complexes $(a_{i,j})$ doublement indexées par des entiers i et j

4.1 Somme sur un rectangle:

On suppose que (i, j) vérifie de manière indépendante $p \le i \le n$ et $m \le j \le l$.

Définition et propriété : Soit $E = [\![p, n]\!] \times [\![m, l]\!]$, on note $\sum\limits_{\substack{p \le i \le n \\ m \le j \le l}} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in E}$.

On a $\sum\limits_{\substack{p \le i \le n \\ m \le j \le l}} a_{i,j} = \sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{j=m}^{l} a_{i,j} = \sum\limits_{j=m}^{l}\sum\limits_{i=p}^{n} a_{i,j}$

Dans la pratique : On peut retenir le principe suivant :
Si les deux champs d'indices sont indépendants alors on peut inverser l'ordre de sommation sans modifier les bornes des sommes.

Cas particulier : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum\limits_{1 \le i,j \le n} a_i b_j$

4.2 Somme triangulaire

On suppose que les indices i et j ne sont pas indépendants et vérifient des inégalités du type
$p \le i \le j \le n$ ou $p \le i < j \le n$ ou $p \le j \le i \le n$ ou $p \le j < i \le n$

Définition et propriété :

① Soit $E = \{ (i, j), p \le i \le j \le n\}$, on note $\sum\limits_{p \le i \le j \le n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in E}$.

On a $\sum\limits_{p \le i \le j \le n} a_{i,j} = \sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum\limits_{j=p}^{n}\sum\limits_{i=p}^{j} a_{i,j}$

② Soit $E = \{ (i, j), p \le i < j \le n\}$, on note $\sum\limits_{p \le i < j \le n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in E}$.

On a $\sum\limits_{p \le i < j \le n} a_{i,j} = \sum\limits_{i=p}^{n-1}\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum\limits_{j=p+1}^{n}\sum\limits_{i=p}^{j-1} a_{i,j}$

Dans la pratique : On peut retenir que lorsque les champs d'indice sont liés, on peut inverser l'ordre de sommation mais il faut modifier les bornes pour respecter les contraintes sur les indices.