Programme de colles-semaine 7- 13/11 au 17/11

I. Calculs de sommes et de produits

• La notation $\sum_{k\in E} a_k$, où E est un ensemble fini d'indices et (a_k) une famille de complexes

Propriétés, sommes à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, séparation des termes d'indice pairs et impairs, télescopage.

La notation $\prod_{k\in E} a_k$, où E est un ensemble fini d'indices et (a_k) une famille de complexes.

Propriétés, produit à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, télescopage.

• Coefficients binomiaux, définition et propriétés. Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie.

II. Calcul d'intégrales et de primitives

• Rappel de Terminale et extension aux fonctions à valeurs complexes.

Si f est continue sur I et si $a\in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

La notation $\int^x f(t)dt$ désigne une primitive quelconque de f sur I.

• Calcul d'intégrales à l'aide de primitives usuelles et par transformation algébrique de la fonction à intégrer.

• Formule d'intégration par parties, Application au calcul d'intégrales et de primitives.

La théorie de l'intégration sera vue ultérieurement

Déroulement de la colle:

① Donner une ou deux primitives usuelles (formulaire joint)

② Une question de cours parmi

- Démonstration de la formule du binôme de Newton
- Enoncer et démontrer la formule d'intégration par parties puis proposer un exemple d'application
- Calcul d'une primitive de $f : x \mapsto \cos^p x \sin^q x$ sur un exemple
- Calcul d'une primitive de $f : x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ sur un exemple

③ Calcul d'une somme double

④ Exercice sur les sommes et/ou les intégrales.
Pas de changement de variable.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

I. Primitives des fonctions usuelles

f(x)	F(x)	Conditions d'application
x^α, $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	valable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$ valable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ si $\alpha\in\mathbb{Z}_-$ valable sur $]0, +\infty[$ si $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$a\in\mathbb{R}$ valable sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$
e^{ax}, $a\in\mathbb{C}^*$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$	valable sur $\mathbb{R}$.
$\ln x$	$x\ln x - x$	valable sur $]0 ;+\infty[$
$\text{ch}x$ $\text{sh}x$ $\text{th}x$ $\dfrac{1}{\text{ch}^2x}$	$\text{sh}x$ $\text{ch}x$ $\ln(\text{ch}x)$ $\text{th}x$	$\left.\right\}$valables sur $\mathbb{R}$.
$\cos x$ $\sin x$	$\sin x$ $-\cos x$	valable sur $\mathbb{R}$
$\cos(\omega t + \varphi)$ $\sin(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$ $-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)$	$\omega\in\mathbb{R}^*$ et $\varphi\in\mathbb{R}$. valable sur $\mathbb{R}$.
$\tan x$ $\text{cotan}x$ $\dfrac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$ $\ln\lvert\sin x\rvert$ $\tan x$	valable sur I où $\cos x \neq 0$ valable sur I où $\sin x \neq 0$ valable sur I où $\cos x \neq 0$

II. Fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur I, sous réserve d'existence

• Une primitive de $u'u^{\alpha}$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel

Avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient : une primitive de $u'\sqrt{u}$ est $\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$

• Une primitive de $\dfrac{u'}{u^{\beta}} = u'u^{-\beta}$ est $\dfrac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \dfrac{-1}{\beta-1}.\dfrac{1}{u^{\beta-1}}$ avec β réel, $\beta \neq 1$

Avec $\beta = \dfrac{1}{2}$, on obtient : une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$

• Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$

• Une primitive de $u'e^{u}$ est e^{u}

• Une primitive de $u'\cos(u)$ est $\sin(u)$

• Une primitive de $u'\sin(u)$ est $-\cos(u)$

• Une primitive de $u'\mathrm{ch}(u)$ est $\mathrm{sh}(u)$

• Une primitive de $u'\mathrm{sh}(u)$ est $\mathrm{ch}(u)$